

COURS

COMPLÉMENTAIRE

D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

A ANGOULÊME. .	chez	Perez-Lecler.
BORDEAUX. . .	—	Chaumas.
BOURGES. . . .	—	Vermeil.
BREST.	—	Mme Vve Lefournier.
LILLE.	—	Vanackère.
LORIENT. . . .	—	Leroux-Cassart.
LYON.	—	Perisse frères.
	—	Brun et Compie.
MARSEILLE. . .	—	Mme Vve Camoin.
METZ.	—	Warion.
MONTPELLIER.	—	Séwalle.
NANCY.	—	G. Grimblot et Cie.
NANTES.	—	Forest aîné.
	—	Guéraud.
ORLÉANS. . . .	—	Gatineau.
RENNES.	—	Verdier.
ROCHEFORT. .	—	Mme Fleury.
	—	Proust-Branday.
ROUEN.	—	Lebrument.
STRASBOURG. .	—	Treuttel et Wurtz.
	—	Mme Levrault.
	—	Derivaux.
TOULON. . . .	—	Monge.
TOULOUSE. . .	—	Mlles Gallon sœurs.
	—	Privat.
	—	Gimet.

BRUXELLES . .	chez	Decq.
LEIPZIG.	—	Michelsen.
LONDRES. . . .	—	Dulau et Cie, Soho-Square.
TURIN	—	Bocca.
VIENNE.	—	Rohrmann.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

COURS

COMPLÉMENTAIRE

D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE RATIONNELLE,

PROFESSÉ A L'ÉCOLE NORMALE,

PAR J. VIEILLE,

Agrégé près la Faculté des Sciences de Paris, Maître de Conférences à l'École Normale,
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée Louis-le-Grand.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1851.

Prof. Alex. Ziwet
gft.
1-30-1923

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne portera pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage résume une partie des exercices préparatoires au concours d'agrégation, qui font l'objet de mes conférences de troisième année à l'École Normale. Il peut servir de complément aux Traités de Calcul différentiel et intégral, et de Mécanique rationnelle, dans lesquels les applications sont ordinairement très-restreintes. Mon but sera atteint, si je suis parvenu, en facilitant l'intelligence des théories, à initier aux progrès de la science cette jeunesse d'élite qui se prépare à subir les fortes épreuves de la licence et du concours d'agrégation.

Parmi les questions résolues, plusieurs se trouvent déjà posées dans les œuvres des Bernoulli, dans les Actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dans les Annales de Gergonne, etc. Les sources auxquelles j'ai puisé sont indiquées dans le cours de l'ouvrage. Les solutions fournies par ces divers Recueils sont très-dignes d'intérêt au point de vue historique; mais il faut convenir que souvent elles sont obtenues par des procédés artificiels qui, tout en faisant briller la grande sagacité de l'inventeur, n'ouvrent pas la route à suivre pour les questions de même

espèce. Ce défaut de méthode nous frappe surtout dans les questions de mécanique. Je me suis attaché, dans la mise en équation de ces problèmes et dans leur discussion, à suivre une marche didactique, présentant l'application régulière des grands principes sur lesquels la science repose aujourd'hui.

Le désir de ne pas excéder les bornes d'un ouvrage destiné à l'enseignement m'a conduit à exposer, d'une manière très-succincte, les travaux de MM. Hamilton et Jacobi, qui ramènent l'intégration des équations générales de la dynamique à la recherche *d'une solution complète quelconque* d'une équation aux différences partielles du premier ordre, non linéaire. J'ai pu développer davantage, à l'occasion du problème célèbre du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, l'usage remarquable que M. Liouville a fait des coordonnées elliptiques. Cette méthode nouvelle est très-propre, par sa simplicité, à entrer dans l'enseignement. Elle réduit immédiatement aux quadratures les équations du mouvement d'un point matériel, dans tous les cas où la fonction des forces satisfait à une certaine condition d'intégrabilité.

Parmi les théories qui forment la première partie de cet ouvrage, un chapitre devait être consacré à la démonstration de plusieurs propositions générales, énoncées dans le Mémoire de M. Poinsot sur une *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Ce chapitre, devenu

inutile par suite des développements analytiques que vient de publier l'auteur *, a été retiré. Qu'aurais-je pu ajouter à l'exposition si lumineuse dont M. Poinsot avait déjà donné un modèle dans sa *Statique?*

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Sturm, dont les affectueux conseils et les utiles indications m'ont souvent guidé dans ce travail.

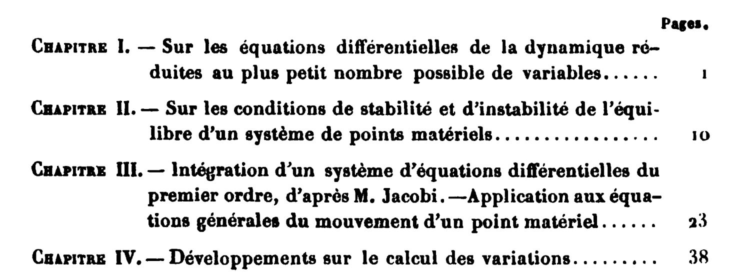
(15 mai 1851.)

* *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XVI, 1851.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIES GÉNÉRALES D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE.



DEUXIÈME PARTIE.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES D'ANALYSE.

TROISIÈME PARTIE.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

LIVRE DEUXIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

LIVRE TROISIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE FIGURE INVARIABLE.

LIVRE QUATRIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE FIGURE VARIABLE.

FIN DE LA TABLE.

COURS

COMPLÉMENTAIRE

D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIES GÉNÉRALES D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA DYNAMIQUE RÉDUITES AU PLUS PETIT NOMBRE POSSIBLE DE VARIABLES.

L'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a donné, dans la deuxième partie de cet ouvrage, une forme remarquable aux équations différentielles de la dynamique réduites à ne contenir que les seules variables dont dépend, à chaque instant, la position du système. Ce qui caractérise ces équations et les rend éminemment propres à la résolution de la plupart des problèmes, c'est que les termes où entrent les différentielles relatives au temps proviennent uniquement d'une seule fonction T, qui n'est autre que la demi-somme des forces vives de tous les points du système.

Cependant ces équations si utiles sont omises dans les Traités de mécanique les plus répandus.

La démonstration de Lagrange (*) n'est pas complète : nous allons d'abord montrer en quoi elle est insuffisante

(*) *Mécanique analytique*, seconde partie, section IV.

Représentons par

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

les équations de condition, au nombre de i, qui existent entre les coordonnées $x, y, z, x', \ldots$ des différents points d'un système en mouvement, et qui sont données par la nature de chaque problème. Soit n le nombre des points matériels : on peut tirer des équations (1) les valeurs de i coordonnées en fonction des $3n - i$ autres, ou, plus généralement, on peut concevoir que les $3n$ coordonnées soient remplacées par des fonctions connues de $3n - i$ nouvelles variables $\theta, \varphi, \psi, \ldots$, et par cette transformation, on sait que la formule générale de la dynamique

$$(2) \quad \sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

se partage en $3n - i$ équations distinctes, qui suffisent pour déterminer les valeurs de $\theta, \varphi, \psi, \ldots$ en fonction du temps.

Cela posé, l'analyse de Lagrange suppose que l'expression de chaque *différentielle dx* en fonction des nouvelles variables $\theta, \varphi, \psi, \ldots$, ne diffère de la *variation* correspondante δx que par le changement du d en δ. Or cela a lieu, en effet, lorsque la fonction des variables $\theta, \varphi, \psi, \ldots$, que x représente, ne contient pas le temps t explicitement ; mais il n'en est plus ainsi, si x est une fonction explicite de t et de $\theta, \varphi, \psi, \ldots$. Soit

$$x = f(t, \theta, \varphi, \psi, \ldots);$$

on a

$$dx = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{d\theta}d\theta + \frac{df}{d\varphi}d\varphi + \frac{df}{d\psi}d\psi + \ldots$$

et

$$\delta x = \frac{df}{d\theta}\delta\theta + \frac{df}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{df}{d\psi}\delta\psi + \ldots .$$

La différentielle dx renferme le terme $\frac{df}{dt}dt$, qui n'a pas son correspondant dans la variation δx, puisqu'en prenant cette variation on doit laisser t constant.

C'est pourquoi nous croyons faire une chose utile à l'enseignement en reprenant l'analyse de Lagrange, et lui donnant toute la généralité désirable (*) ; en même temps nous en simplifierons l'algorithme.

Soient donc θ, φ, ψ,... les variables réduites au plus petit nombre possible dont x, y, z, x',... sont des fonctions connues, déduites des équations (1). Comme ces dernières peuvent contenir le temps t explicitement, cette variable entrera généralement dans les fonctions que x, y, z, x',... représentent. Posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi'....$$

On aura pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, δx, δy, δz, des expressions de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha + a\theta' + a_1\varphi' + a_2\psi' + \ldots, \\ \delta x = a\delta\theta + a_1\delta\varphi + a_2\delta\psi + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} = \beta + b\theta' + b_1\varphi' + b_2\psi' + \ldots, \\ \delta y = b\delta\theta + b_1\delta\varphi + b_2\delta\psi + \ldots, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma + c\theta' + c_1\varphi' + c_2\psi' + \ldots, \\ \delta z = c\delta\theta + c_1\delta\varphi + c_2\delta\psi + \ldots; \end{cases}$$

(*) A la fin de la démonstration de Lagrange on lit ces mots : « Cette « transformation aura lieu également, quand même parmi les nouvelles « variables il se trouverait le temps t, pourvu qu'on le regarde comme con« stant, c'est-à dire qu'on fasse $\delta t = 0$. » Mais les calculs sur lesquels cette transformation repose doivent alors être modifiés ; et ce sont ces modifications nécessaires qui font l'objet de ce chapitre.

α, β, γ représentent les dérivées partielles des fonctions x, y, z, par rapport à t, si cette variable y entre explicitement. Ces termes ne se retrouvent pas dans les valeurs de δx, δy, δz.

$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots$ sont des fonctions connues de $t, \varphi, \psi, \theta, \ldots$.

Cela posé, avant de substituer dans l'équation (2) les valeurs de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \ldots, \delta x$, etc., on transforme le trinôme

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$

en deux groupes contenant des différentielles du premier ordre, et soumis, l'un au signe d, l'autre au signe δ. A cet effet, on a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\\ - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right);\end{aligned}$$

en sorte que l'équation (2) prend la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum m\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\right\}\\ &- \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.\end{aligned}\right.$$

Maintenant on calculera séparément les deux quantités

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right).$$

Mais, comme on devra finalement égaler à zéro l'ensemble des termes que multipliera chacune des variations indépendantes $\delta\theta$, $\delta\varphi, \ldots$, et que d'ailleurs ces variables entrent évidemment de la même manière dans les calculs,

on s'attachera seulement à faire ressortir la composition du coefficient de $\delta\theta$.

On aura ainsi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\theta'+\mathrm{C}\frac{\theta'^2}{2}+\mathrm{D}\theta'\varphi'+\ldots$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=(\mathrm{B}+\mathrm{C}\theta'+\mathrm{D}\varphi'+\ldots)\delta\theta+\ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\ \beta^2+\ \gamma^2 &= 2\mathrm{A},\\
a\alpha+b\beta+c\gamma &= \mathrm{B},\\
a^2+\ b^2+\ c^2 &= \mathrm{C},\\
aa_1+bb_1+cc_1 &= \mathrm{D}.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots
\end{aligned}$$

Différentions la première expression par δ et la deuxième par d; il viendra $\left(\text{en observant que } \frac{d.\delta\theta}{dt}=\delta.\frac{d\theta}{dt}=\delta.\theta'\right)$,

$$\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)=\left(\frac{d\mathrm{A}}{d\theta}+\theta'\frac{d\mathrm{B}}{d\theta}+\frac{\theta'^2}{2}\frac{d\mathrm{C}}{d\theta}+\theta'\varphi'\frac{d\mathrm{D}}{d\theta}+\ldots\right)\delta\theta$$
$$+(\mathrm{B}+\mathrm{C}\theta'+\mathrm{D}\varphi'+\ldots)\delta\theta'+\ldots,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=\frac{d}{dt}(\mathrm{B}+\mathrm{C}\theta'+\mathrm{D}\varphi'+\ldots).\delta\theta$$
$$+(\mathrm{B}+\mathrm{C}\theta'+\mathrm{D}\varphi'+\ldots)\delta\theta'+\ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), les *termes multipliés par $\delta\theta'$ disparaissent d'eux-mêmes;* c'est cette réduction qui fait le succès de la méthode : il reste, pour le coefficient de la variation $\delta\theta$,

$$(5)\qquad \sum m\left[\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(\mathrm{B}+\mathrm{C}\theta'+\mathrm{D}\varphi'+\ldots)\\[2mm] -\left(\dfrac{d\mathrm{A}}{d\theta}+\theta'\dfrac{d\mathrm{B}}{d\theta}+\dfrac{\theta'^2}{2}\dfrac{d\mathrm{C}}{d\theta}+\theta'\varphi'\dfrac{d\mathrm{D}}{d\theta}+\ldots\right)\end{array}\right].$$

Actuellement, désignons par T la demi-somme des forces vives du système,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right) \\ &= \sum m\left(A + B\theta' + \frac{C\theta'^2}{2} + D\theta'\varphi' + \ldots\right). \end{aligned}$$

On voit que l'expression (5) n'est autre chose que

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\theta};$$

quant à la partie du premier membre de l'équation (4), qui renferme les forces appliquées (X, Y, Z), savoir,

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

sa transformation en fonction des variables θ, φ, ψ,..., s'effectuera par voie de simple substitution, et l'on connaîtra, dans chaque cas particulier, sans difficulté, le coefficient de $\delta\theta$ qui en provient.

Dans les applications ordinaires de la dynamique, il existe une *fonction des forces*, c'est-à-dire qu'on a

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dV,$$

V étant fonction de t, θ, φ, ψ,..., et, par suite,

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta V = \frac{dV}{d\theta}\delta\theta + \ldots.$$

Le coefficient complet de $\delta\theta$, dans l'équation (4), devient donc

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\theta} - \frac{dV}{d\theta}.$$

En définitive, l'équation (4) se partage dans les sui-

vantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{dT}{d\theta'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\theta} - \dfrac{dV}{d\theta} = 0, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{dT}{d\varphi'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\varphi} - \dfrac{dV}{d\varphi} = 0, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\psi} - \dfrac{dV}{d\psi} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations sont en même nombre que les variables θ, φ, ψ,..., dont dépend, à chaque instant, la position du système. Nous les appliquerons à la solution de divers problèmes, dans le cours de cet ouvrage.

Quand les fonctions T et V ne renferment pas le temps t explicitement, ce qui exige que les liaisons du système, exprimées par les équations (1), soient indépendantes du temps, on obtient immédiatement une intégrale première des équations (6), en les multipliant respectivement par $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$,..., et ajoutant les produits ; il vient

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = \theta' d\left(\dfrac{dT}{d\theta'}\right) + \varphi' d\left(\dfrac{dT}{d\varphi'}\right) + \ldots \\ \quad - \left(\dfrac{dT}{d\theta} d\theta + \dfrac{dT}{d\varphi} d\varphi + \ldots\right) - \left(\dfrac{dV}{d\theta} d\theta + \dfrac{dV}{d\varphi} d\varphi + \ldots\right); \end{cases}$$

or

$$\theta' d\left(\frac{dT}{d\theta'}\right) = d\left(\theta' \frac{dT}{d\theta'}\right) - \frac{dT}{d\theta'} d\theta'.$$

D'ailleurs, T ne contenant pas le temps t, on a

$$\frac{dT}{d\theta} d\theta + \frac{dT}{d\varphi} d\varphi + \ldots + \frac{dT}{d\theta'} d\theta' + \frac{dT}{d\varphi'} d\varphi' + \ldots = dT,$$

et V ne contenant que θ, φ, ψ, sans θ', φ', ψ',..., on a

$$\frac{dV}{d\theta} d\theta + \frac{dV}{d\varphi} d\varphi + \ldots = dV.$$

L'équation (7) devient donc

$$d\left(\theta'\frac{dT}{d\theta'}+\varphi'\frac{dT}{d\varphi'}+\ldots\right)-dT-dV=0.$$

Elle est intégrable, et donne

$$\theta'\frac{dT}{d\theta'}+\varphi'\frac{dT}{d\varphi'}+\ldots-T-V=\text{const.}$$

Mais, par le théorème des fonctions homogènes,

$$\theta'\frac{dT}{d\theta'}+\varphi'\frac{dT}{d\varphi'}+\ldots=2T;$$

on a donc définitivement

(8) $$T-V=\text{const.}$$

Cette intégrale, d'une grande importance dans la solution des problèmes de mécanique, contient *le principe des forces vives*.

Il est utile de remarquer la forme que prend la fonction T dans divers cas.

Si l'on définit la position d'un point m (*fig.* 1), par l'ordonnée parallèle à l'axe oz, $mP=z$, la projection $oP=r$ de son rayon vecteur sur le plan xoy, et l'angle $Pox=\psi$, on aura

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\psi^2,$$

et, par conséquent,

$$T=\frac{1}{2}\sum m\left[\frac{dz^2}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\psi^2}{dt^2}\right].$$

On passera ensuite de ce système de coordonnées mixtes, à celui des coordonnées polaires ordinaires

[$om=R$, l'angle $zom=\theta$, et l'angle $Pox=\psi$],

en substituant aux variables z et r les variables R et θ qui sont liées aux premières, absolument de même que r et ψ l'étaient à x et y. On aura donc

$$dz^2+dr^2=dR^2+R^2d\theta^2;$$

ajoutant membre à membre avec

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2,$$

il viendra

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 d\theta^2 + r^2 d\psi^2;$$

et comme $r = \mathrm{R}\sin\theta$,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2),$$

enfin

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m\left[\frac{d\mathrm{R}^2}{dt^2} + \mathrm{R}^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\right)\right].$$

Remarquons encore que les transformations précédentes ne sont pas seulement applicables au cas où les variables θ, φ, ψ,... sont réduites au plus petit nombre possible, c'est-à-dire ne dépendent d'aucune équation de condition. Il peut arriver que des difficultés d'élimination conduisent à conserver, dans le calcul, un nombre de variables θ, φ, ψ,... plus grand qu'il n'est nécessaire pour définir à chaque instant la position du système; alors on pourra toujours écrire l'équation (4) sous la forme

$$\left[\frac{d\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta} - \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right]\delta\theta + \left(\frac{d.\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\varphi} - \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \ldots = 0;$$

mais il ne serait plus exact d'égaler séparément à zéro le coefficient de chaque variation $\delta\theta$, $\delta\varphi$,..., puisqu'elles ne sont pas indépendantes. On devra associer à cette équation les équations de condition qui lient encore les variables θ, φ,..., et qu'on différentiera par δ. Puis on appliquera à ce système, soit la méthode des multiplicateurs, soit telle autre méthode d'élimination qu'on jugera convenable, ainsi qu'on l'explique dans les Traités de mécanique pour l'équation (4), prise sous sa forme primitive et associée aux équations de condition $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$.

CHAPITRE II.

SUR LES CONDITIONS DE STABILITÉ ET D'INSTABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS.

Considérons un système de n points matériels en équilibre et liés entre eux d'une manière quelconque. Ces liaisons sont, en général, exprimées par des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

entre les coordonnées x, y, z, x',... des divers points du système. Si nous désignons par i le nombre de ces équations, il y aura $3n - i$ variables indépendantes, et l'on peut concevoir qu'on exprime toutes les coordonnées en fonction de ces variables.

Nous supposerons, comme dans le chapitre précédent, que les forces (X, Y, Z) satisfassent à la condition que la somme

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

étendue à tous les points du système, soit la différentielle immédiate d'une fonction φ des coordonnées $x, y, z, x', \ldots$, ou, du moins, nous supposerons que la somme ci-dessus devienne intégrable après qu'on l'a réduite à ne plus contenir que les seules variables indépendantes. Les forces de la nature, attractives ou répulsives, qui émanent de centres fixes, ou des actions mutuelles entre deux masses, et qui ne dépendent que des distances, remplissent, comme on sait, cette condition.

Si α, β, γ,... désignent un système de valeurs des variables indépendantes qui déterminent une position d'équilibre, et qu'on vienne à leur attribuer des variations infiniment petites $\delta\alpha$, $\delta\beta$,..., on a, en vertu du principe des

vitesses virtuelles, $\delta\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; d'où l'on conclut que, pour chaque position d'équilibre, la fonction φ est, en général, un maximum ou un minimum. Il y a entre le maximum et le minimum de la fonction φ une différence fondamentale. Quand le maximum a lieu réellement, l'équilibre est stable, c'est-à-dire que si l'on écarte extrêmement peu le système de sa position d'équilibre, et qu'on imprime à chacun des points qui le composent de très-petites vitesses initiales, les déplacements de ces points resteront très-petits pendant toute la durée du mouvement, et ne dépasseront jamais certaines limites très-rapprochées de la position d'équilibre; au contraire, si la fonction φ est minimum, l'équilibre est instable, c'est-à-dire que le système, une fois écarté de la position d'équilibre, tendra à s'en éloigner de plus en plus, quel que soit l'ébranlement initial.

Nous allons démontrer ces deux théorèmes importants.

La démonstration du premier est fondée sur le principe des forces vives. Elle suppose, par conséquent, que les équations de liaisons $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ ne renferment pas le temps t.

Nous avons déjà désigné par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs des variables qui déterminent une position d'équilibre. Soient $p, q, r, \ldots$ les accroissements que prennent, au bout du temps t, ces variables, par suite d'un déplacement très-petit imprimé au système; p, q, r sont des fonctions inconnues du temps t, dont les valeurs initiales p_0, q_0, r_0 commencent par être très-petites. Désignons par V_0 la vitesse initiale, pareillement très-petite, communiquée à la masse m; chacune des coordonnées $x, y, z, x', \ldots$ est une fonction connue de $\alpha + p$, $\beta + q$, $\gamma + r$, qui ne renferme pas le temps t.

Cela posé, on a, à l'origine du mouvement,

$$\Sigma m V_0^2 = \varphi(\alpha + p_0, \beta + q_0, \gamma + r_0, \ldots) + \text{const.},$$

et, au bout du temps t,

$$\Sigma m V^2 = \varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) + \text{const.};$$

d'où

$$\Sigma m V^2 = \Sigma m V_0^2 + \varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r, \ldots)$$
$$- \varphi(\alpha + p_0, \beta + q_0, \gamma + r_0, \ldots).$$

Maintenant, pour démontrer la stabilité de l'équilibre dans le cas où $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est un maximum, on s'attache à faire voir que si les variables p, q, r,... ne restaient pas toujours comprises entre des limites déterminées et très-petites, il arriverait un instant où la somme $\Sigma m V^2$ aurait une valeur négative, ce qui serait absurde.

Ici, M. Lejeune-Dirichlet a notablement perfectionné la démonstration ordinaire (*). Celle-ci laissait à désirer, non sous le rapport de la rigueur, mais de la généralité, attendu qu'elle reposait sur la considération des termes du deuxième ordre, en p, q, r, que fournit la série de Taylor appliquée à la fonction $\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r)$, termes dont l'ensemble peut s'évanouir sans que le maximum cesse d'avoir lieu.

Voici, sauf quelques modifications de forme, le procédé de M. Dirichlet. Posons

$$\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + \psi(p, q, r, \ldots);$$

il en résulte

$$\varphi(\alpha + p_0, \beta + q_0, \gamma + r_0, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots),$$

et

$$\Sigma m V^2 = \Sigma m V_0^2 + \psi(p, q, r, \ldots) - \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots).$$

On a

$$\psi(0, 0, 0, \ldots) = 0,$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1847).

et puisque $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est maximum, la fonction $\psi(p, q, r, \ldots)$ devra être constamment négative, tant que les variables p, q, r,... auront des valeurs numériques inférieures à certaines limites positives p', q', r'. On peut supposer les valeurs absolues de p_0, q_0, r_0, plus petites que p', q', r', et alors il est certain que, pendant un certain temps, les variables p, q, r seront aussi numériquement plus petites que ces limites. Je dis maintenant que cet état de choses se maintiendra pendant toute la durée du mouvement, c'est-à-dire que chacune de ces variables restera constamment inférieure à la limite qui lui correspond.

En effet, soit A la plus petite valeur absolue que puisse prendre la fonction $\psi(p, q, r, \ldots)$, lorsqu'on attribue divers systèmes de valeurs très-petites à p, q, r,..., tels que l'une, au moins, de ces variables soit égale en valeur absolue à sa limite p', q', r' (A n'est pas nulle); et supposons que l'écart initial satisfasse à la condition

$$\Sigma m V_0^2 - \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots) < A,$$

ce qui est toujours possible.

Cela posé, si les variables p, q, r ne restaient pas constamment au-dessous de p', q', r',...; comme ce sont des fonctions continues du temps, il faudrait qu'à un certain instant une ou plusieurs de ces variables devinssent numériquement égales à leurs limites respectives, sans qu'aucune des autres variables eût dépassé la sienne : à cet instant on aurait

$$\psi(p, q, r, \ldots) \leqq -A,$$

et ajoutant cette inégalité à la précédente,

$$\Sigma m V_0^2 + \psi(p, q, r, \ldots) - \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots) < 0;$$

par conséquent, $\Sigma m V^2$ aurait une valeur négative.

Ainsi, dans le cas où la fonction φ est un maximum, les variables p, q, r ne pourront pas croître au delà de certaines limites déterminées et aussi petites que l'on voudra. Les vitesses des différents points du système seront également limitées, puisque $\Sigma m V^2$ reste toujours inférieure, ou au plus égale à

$$\Sigma m V_0^2 - \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots).$$

Passons au cas où la fonction φ est un minimum.

Le mode de démonstration que nous venons d'exposer n'est pas propre à mettre en évidence l'instabilité de l'équilibre.

Lagrange a résolu cette dernière partie de la question, dans la sixième section de la *Mécanique analytique*, où il étudie les oscillations très-petites d'un système de points matériels autour de leurs positions d'équilibre. Il y démontre incidemment l'instabilité, dans le cas où la fonction φ est un minimum.

Nous nous proposons de donner à cette démonstration une forme plus simple et propre à être admise dans l'enseignement. En même temps nous signalerons un cas où l'analyse de Lagrange est en défaut.

Nous partirons de l'équation générale de la dynamique,

$$(1)\quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z);$$

et d'abord, il convient d'y remplacer x, y, z, x',... par leurs valeurs en fonction des $3n - i$ variables indépendantes, tirées des i équations de condition $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,.... Chacune des coordonnées x, y, z, x',... peut être considérée, ainsi qu'on l'a déjà dit, comme une fonction de $\alpha + p$, $\beta + q$, $\gamma + r$,... sans t; α, β, γ,... désignant

les valeurs des variables pour la position d'équilibre. Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que ces variables soient au nombre de trois.

Lorsqu'on substitue les valeurs de $x, y, z, x', \ldots$ dans la somme

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz),$$

elle devient, par hypothèse, la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r)$; par conséquent, la même substitution, effectuée dans le second membre de l'équation (1), où les d sont changés en δ, donnera

$$(2) \quad \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \delta . \varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r).$$

Tant que p, q, r auront de très-petites valeurs, cette fonction φ pourra être développée, par la formule de Taylor, en série très-convergente, ordonnée suivant les puissances et les produits de p, q, r. Comme $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum, les termes de première dimension en p, q, r seront nuls, et l'on aura

$$\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$+ \frac{1}{1.2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr) + \varepsilon,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = A, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} = B, \quad \frac{d^2\varphi}{d\gamma^2} = C,$$
$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta} = D, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha d\gamma} = E, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta d\gamma} = F.$$

ε désigne l'ensemble des termes d'ordre supérieur au second, qu'il est inutile de développer. Nous supposons que le minimum de la fonction puisse être constaté par la considération des seuls termes du deuxième ordre; en sorte que le polynôme $(Ap^2 + Bq^2 + \ldots + 2Fqr)$ conserve con-

stamment le signe $+$, quels que soient les signes et les grandeurs de p, q, r.

En prenant la variation de la fonction φ, et omettant les termes provenant de ε, lesquels contiendraient les carrés et les produits des variables p, q, r, supposées très-petites, on aura simplement

$$\delta.\varphi(\alpha + p,\ \beta + q,\ \gamma + r) = (\mathrm{A}p + \mathrm{D}q + \mathrm{E}r)\,\delta p \\ + (\mathrm{D}p + \mathrm{B}q + \mathrm{F}r)\,\delta q + (\mathrm{E}p + \mathrm{F}q + \mathrm{C}r)\,\delta r.$$

Si l'on compare entre eux les groupes de termes qui multiplient δp, δq, δr dans le second membre de cette égalité, on remarquera que les coefficients des variables qui entrent dans un groupe se répètent tous une fois dans les autres groupes, à l'exception du coefficient de la variable soumise au signe δ dans ce même groupe, lequel ne se répète pas. Par exemple, les coefficients D et E du premier groupe qui est affecté de δp, se retrouvent une fois dans les autres groupes, savoir, D dans le deuxième groupe et E dans le troisième, et, de plus, ils multiplient précisément la variable p dans ces groupes; mais le coefficient A n'est pas répété. Cette remarque, qui nous sera utile plus loin, subsiste évidemment quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Considérons actuellement le premier membre de l'équation (2). On a, pour chaque coordonnée, un développement en série de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 p + a_2 q + a_3 r + \zeta, \\ y &= b + b_1 p + b_2 q + b_3 r + \eta, \\ z &= c + c_1 p + c_2 q + c_3 r + \theta, \\ x' &= a' + a'_1 q + a'_2 q + a'_3 r + \zeta', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ζ, η, θ, ζ',... désignent l'ensemble des termes du deuxième

ordre et des ordres supérieurs. Les coefficients a, a_1, a_2,..., b, b_1,... etc., sont des constantes données.

On en déduira les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et aussi celles de δx, δy, δz; et l'on négligera les termes qui proviendront des restes ζ, η, θ,..., parce que, dans les produits $\frac{d^2x}{dt^2}\delta x$, $\frac{d^2y}{dt^2}\delta y$,..., ces termes introduiraient les carrés et les produits de p, q, r et de leurs dérivées, que nous sommes convenus de négliger. On aura ainsi

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\left(\text{A}'\frac{d^2p}{dt^2}+\text{D}'\frac{d^2q}{dt^2}+\text{E}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta p$$
$$+\left(\text{D}'\frac{d^2p}{dt^2}+\text{B}'\frac{d^2q}{dt^2}+\text{F}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta q+\left(\text{E}'\frac{d^2p}{dt^2}+\text{F}'\frac{d^2q}{dt^2}+\text{C}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta r,$$

en posant

$$\Sigma m(a_1^2+b_1^2+c_1^2)=\text{A}',\quad \Sigma m(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)=\text{D}',$$
$$\Sigma m(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=\text{B}',\quad \Sigma m(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)=\text{E}',$$
$$\Sigma m(a_3^2+b_3^2+c_3^2)=\text{C}',\quad \Sigma m(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)=\text{F}'.$$

Il y a, sur la composition des groupes qui multiplient δp, δq, δr, dans le second membre de l'équation ci-dessus, une remarque analogue à celle que nous avons faite plus haut. Chaque coefficient se trouve répété deux fois, à l'exception du coefficient de la dérivée de la variable soumise au signe δ dans le groupe que l'on considère. Ainsi, par exemple, les coefficients D' et E' du premier groupe en δp se retrouvent, l'un dans le deuxième groupe, l'autre dans le troisième, et ils y multiplient précisément les dérivées de la variable p. Ce fait est général, et a lieu quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Les deux membres de l'équation (2) étant ainsi transfor-

més, on devra égaler respectivement les coefficients de chacune des variations indépendantes δp, δq, δr, que ces deux membres renferment. Il en résultera des équations linéaires à coefficients constants, en même nombre que les variables indépendantes p, q, r, et propres à déterminer, par approximation, ces variables en fonction du temps, du moins tant qu'elles resteront très-petites.

Ces équations sont ici au nombre de trois, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} A'\dfrac{d^2p}{dt^2}+D'\dfrac{d^2q}{dt^2}+E'\dfrac{d^2r}{dt^2}-Ap-Dq-Er=0,\\ D'\dfrac{d^2p}{dt^2}+B'\dfrac{d^2q}{dt^2}+F'\dfrac{d^2r}{dt^2}-Dp-Bq-Fr=0,\\ E'\dfrac{d^2p}{dt^2}+F'\dfrac{d^2q}{dt^2}+C'\dfrac{d^2r}{dt^2}-Ep-Fq-Cr=0. \end{cases}$$

En rapprochant les deux remarques que nous avons faites ci-dessus, on peut dire que tout coefficient de l'une de ces équations se retrouve dans l'une des autres, à l'exception des deux coefficients relatifs à la variable p dans la première équation, à la variable q dans la deuxième, à la variable r dans la troisième, lesquels ne sont pas répétés. De plus, les coefficients relatifs à une variable, et susceptibles de répétition, dans l'une des équations (par exemple D et D' dans la première), deviennent, dans l'une des autres équations, coefficients relatifs à la variable pour laquelle il n'y avait pas répétition dans l'équation d'où l'on est parti.

Nous allons maintenant démontrer que, dans le cas où la fonction φ est un minimum, les valeurs de p, q, r, qui vérifient ces équations, ne sauraient demeurer toujours très-petites, quelle qu'ait été leur petitesse dans l'origine. Il en faudra conclure que l'hypothèse d'un mouvement oscillatoire dans lequel les points du système resteraient toujours

très-voisins de leurs positions d'équilibre, est inadmissible, et, par conséquent, que l'équilibre est instable.

On sait qu'on satisfait aux équations (3) par des valeurs de la forme

$$p = k\mathrm{H}\sin\left(t\sqrt{\rho} - h\right),\quad q = k'\mathrm{H}\sin\left(t\sqrt{\rho} - h\right),$$
$$r = k''\mathrm{H}\sin\left(t\sqrt{\rho} - h\right),$$

H et h étant des constantes arbitraires; et l'on a, pour déterminer ρ et les rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, les trois équations

$$(4)\quad \begin{cases} \rho(\mathrm{A}'k + \mathrm{D}'k' + \mathrm{E}'k'') + (\mathrm{A}k + \mathrm{D}k' + \mathrm{E}k'') = 0, \\ \rho(\mathrm{D}'k + \mathrm{B}'k' + \mathrm{F}'k'') + (\mathrm{D}k + \mathrm{B}k' + \mathrm{F}k'') = 0, \\ \rho(\mathrm{E}'k + \mathrm{F}'k' + \mathrm{C}'k'') + (\mathrm{E}k + \mathrm{F}k' + \mathrm{C}k'') = 0. \end{cases}$$

De deux d'entre elles, on déduira les valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, sous forme de fractions rationnelles contenant la deuxième puissance de ρ, et la substitution de ces valeurs dans la troisième équation fournira une équation en ρ du troisième degré. En général, cette équation en ρ sera d'un degré marqué par le nombre des variables qui servent à déterminer la position du système. A chacune des racines de cette équation correspondra un système de valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$; on pourra prendre, pour la symétrie, k égal au dénominateur commun de ces rapports. De cette manière, on aura trois systèmes de valeurs particulières pour p, q, r, et il ne restera qu'à en faire la somme (en affectant dans chaque système les constantes arbitraires H et h d'un caractère différent) pour avoir les intégrales générales des équations (3). Quant aux six constantes arbitraires, on les déterminera au moyen des valeurs données de p, q, r, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ pour $t = 0$; comme ces dernières sont supposées très-

petites, il est visible que les valeurs de H le seront aussi; et, par suite, les valeurs de p, q, r seront très-petites, du moins au commencement du mouvement, ainsi que cela devait être.

Or, sans prendre la peine de composer l'équation en ρ, on peut s'assurer aisément qu'elle n'aura pas de racines *réelles et positives;* et cela suffira pour prouver l'instabilité de l'équilibre. Car alors les valeurs de $\sqrt{\rho}$ étant toutes imaginaires, les sinus qui entrent dans les expressions de p, q, r se transformeront *tous* en exponentielles réelles, et, par suite, les valeurs générales de p, q, r se composeront de termes de la forme

$$(\mathrm{R}e^{\omega t} + \mathrm{S}e^{-\omega t}),$$

où nous désignons par ω l'une des valeurs de $\sqrt{-\rho}$, et par R et S des constantes qui dépendent du déplacement initial du système. Si R n'est pas nul, le terme ci-dessus finira par croître indéfiniment avec t. Ainsi, à moins qu'on ne suppose le cas tout à fait exceptionnel d'un déplacement initial, présentant cette circonstance singulière que tous les coefficients, tels que R, des termes à exposants positifs, soient nuls, on sera certain que les valeurs des variables p, q, r cesseront d'être très-petites au bout d'un certain temps. Le système tendra donc toujours à s'éloigner davantage de sa position d'équilibre, quel que soit l'ébranlement initial; sauf toutefois le cas unique que nous venons de signaler, et où l'analyse précédente ne permet pas d'affirmer qu'il y ait instabilité.

La question est ramenée à prouver que l'équation en ρ n'a pas de racines réelles et positives; à cet effet, nous allons mettre les équations (4) sous une autre forme : désignons par T ce que devient la demi-somme des forces vives des points du système, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

quand on y remplace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par les valeurs suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = a_1 k + a_2 k' + a_3 k'',$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 k + b_2 k' + b_3 k'',$$

$$\frac{dz}{dt} = c_1 k + c_2 k' + c_3 k'';$$

nous aurons

$$T = \tfrac{1}{2}(A' k^2 + B' k'^2 + C' k''^2 + 2D' kk' + 2E' kk'' + 2F' k'k'').$$

Soit encore V ce que devient le polynôme du deuxième ordre de la fonction des forces, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + \ldots)$, quand on y remplace p, q, r respectivement par k, k', k'', en sorte que

$$V = \tfrac{1}{2}(Ak^2 + Bk'^2 + Ck''^2 + 2Dkk' + 2Ekk'' + 2Fk'k'').$$

Il suit des remarques que nous avons faites sur la composition des équations (4), que les coefficients de ρ dans ces équations ne sont autres que les dérivées partielles de T relatives à k, k', k'', et que les groupes indépendants de ρ ne sont autres que les dérivées partielles de V relatives aux mêmes quantités. Les équations (4) peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\rho \frac{dT}{dk} + \frac{dV}{dk} = 0,$$

$$\rho \frac{dT}{dk'} + \frac{dV}{dk'} = 0,$$

$$\rho \frac{dT}{dk''} + \frac{dV}{dk''} = 0,$$

et si on les ajoute, après les avoir multipliées respectivement par k, k', k'',..., on aura, vu que T et V sont des fonctions homogènes du deuxième degré,

$$\rho T + V = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = -\frac{V}{T}.$$

Cette formule renferme la démonstration de la proposition énoncée. En effet, remarquons que les valeurs réelles de ρ doivent correspondre à des valeurs réelles de k, k', k''; et qu'en supposant k, k', k'' réelles, les fonctions T et V sont essentiellement positives, savoir : la fonction T, par sa définition même, puisqu'elle provient d'une somme de carrés de quantités réelles, et la fonction V parce que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum. Donc les valeurs réelles de ρ sont négatives.

Il nous a suffi, pour établir l'instabilité de l'équilibre, de démontrer que l'équation finale en ρ ne saurait admettre de racines réelles positives.

M. Sturm a soumis les racines de cette équation à une discussion approfondie. Après avoir établi que toutes ces racines sont *réelles et inégales* (ce qu'avait déjà fait Laplace, d'une manière moins simple, dans un chapitre de la *Mécanique céleste*), M. Sturm a fourni le moyen de les séparer, et a fait connaître plusieurs propriétés remarquables qu'elles possèdent. Un extrait seulement de ce Mémoire important a été inséré dans le *Bulletin de Férussac* (octobre 1829).

CHAPITRE III.

INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, D'APRÈS M. JACOBI. — APPLICATION AUX ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

1. On propose d'intégrer un système d'équations différentielles du premier ordre, de la forme suivante :

$$(1)\quad \frac{dx}{dt}=\frac{dV}{dx'},\quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{dV}{dx},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dV}{dy'},\quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{dV}{dy},\ldots,$$

V étant une fonction connue des variables x, x', y, y', qui ne renferme pas la variable t explicitement. Il suffira, pour l'exposition de la méthode, de considérer le cas de quatre équations différentielles.

On sait que les intégrales renfermeront quatre constantes arbitraires α, β, α', β'; en sorte que, si on les suppose résolues par rapport aux constantes, elles prendront la forme

$$\varphi(t, x, x', y, y')=\alpha,\quad \psi(t, x, x', y, y')=\beta,$$
$$\varphi_1(t, x, x', y, y')=\alpha',\quad \psi_1(t, x, x', y, y')=\beta'.$$

De plus, chacune des fonctions φ, ψ,... satisfait identiquement à l'équation aux différences partielles,

$$(2)\quad \frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{dV}{dx'}-\frac{d\varphi}{dx'}\frac{dV}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dV}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy'}\frac{dV}{dy}=0.$$

Et réciproquement, si une fonction $\varphi(t, x, x', y, y')$, dans laquelle t, x, x', y, y' sont considérées comme des lettres indépendantes, est telle, qu'elle satisfasse identiquement à l'équation (2), on aura une intégrale des équa-

tions (1), en posant $\varphi(t, x, x', y, y') = \alpha$, où α désigne une constante arbitraire, et x, x', y, y' des fonctions de la variable indépendante t, qui satisfont aux mêmes équations différentielles.

Cela posé, si l'on prend pour φ la fonction V, il est visible que l'équation (2) sera identiquement satisfaite; car V ne contenant pas t, le terme $\frac{dV}{dt}$ est nul, et il reste l'identité

$$\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dx'} - \frac{dV}{dx'}\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dV}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\frac{dV}{dy} = 0.$$

Donc $V = \alpha$ est une intégrale première des équations (1), et cela, quelle que soit la fonction V, pourvu que t n'y entre pas.

Supposons maintenant que le problème, qui a conduit à des équations différentielles de la forme (1), soit de telle nature, qu'on sache trouver une seconde intégrale

$$F(x, x', y, y') = \beta,$$

la fonction F ne contenant pas la variable t.

C'est ce qui a lieu, par exemple, dans la dynamique, lorsqu'on étudie le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe : le *principe des aires* fournit cette seconde intégrale. Nous développerons plus loin cette application.

Le théorème de M. Jacobi consiste en ce que, *la seconde intégrale une fois connue, on pourra toujours déterminer, à l'aide d'une simple quadrature, les deux autres intégrales qui complètent la résolution du problème.*

En effet, concevons qu'on ait tiré des deux intégrales $V = \alpha$, $F = \beta$, les valeurs de x' et y' en fonction de x, y, α et β, et qu'on les ait substituées dans la première et la troisième équation du système (1); les fonctions $\frac{dV}{dx'}$, $\frac{dV}{dy'}$ ne contiendront plus, après cette substitution, que les va-

riables x et y, et nous les désignerons, sous cette nouvelle forme, par $\left(\frac{dV}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy'}\right)$.

La question sera ainsi ramenée à intégrer le système des équations

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dV}{dx'}\right), \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dV}{dy'}\right),$$

et tout se réduit à trouver deux fonctions Π de t, x et y, qui satisfassent à l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \frac{d\Pi}{dt} + \frac{d\Pi}{dx}\left(\frac{dV}{dx'}\right) + \frac{d\Pi}{dy}\left(\frac{dV}{dy'}\right) = 0.$$

A cet effet, nous allons démontrer que x' et y', étant considérées comme des fonctions de x, y, α, β, déduites des deux premières intégrales, $x'dx + y'dy$ est la différentielle exacte d'une fonction Θ de x, y, α et β. Il suffit, pour cela, de prouver que $\frac{dx'}{dy} = \frac{dy'}{dx}$.

Or, si l'on différentie, par rapport à x, les équations $V = \alpha$, $F = \beta$, en y regardant x', y' comme fonctions des variables indépendantes x et y, il viendra

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0.$$

Éliminant $\frac{dx'}{dx}$, on en tire

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx}\frac{dV}{dx'} - \frac{dF}{dx'}\frac{dV}{dx}}{\frac{dF}{dx'}\frac{dV}{dy'} - \frac{dF}{dy'}\frac{dV}{dx'}}.$$

En changeant x en y, x' en y' et *vice versâ*, on a

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{\frac{dF}{dy}\frac{dV}{dy'} - \frac{dF}{dy'}\frac{dV}{dy}}{\frac{dF}{dy'}\frac{dV}{dx'} - \frac{dF}{dx'}\frac{dV}{dy'}}.$$

Les dénominateurs sont égaux et de signes contraires : il reste à faire voir que la somme des numérateurs est nulle, ou que

$$\frac{dF}{dx}\frac{dV}{dx'}-\frac{dF}{dx'}\frac{dV}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dV}{dy'}-\frac{dF}{dy'}\frac{dV}{dy}=0.$$

Effectivement, cette équation exprime que la fonction F satisfait à l'équation (2), et c'est ce qui a lieu, puisque $F=\beta$ est une intégrale des équations (1).

On peut donc poser

$$x'=\frac{d\Theta}{dx},\quad y'=\frac{d\Theta}{dy},$$

et la fonction Θ sera connue par l'intégration directe de la différentielle $x'dx+y'dy$, réduite aux deux variables x et y.

Maintenant je dis que deux valeurs de la fonction Π, propres à satisfaire à l'équation (4), sont

$$\frac{d\Theta}{d\beta}\quad\text{et}\quad\frac{d\Theta}{d\alpha}-t.$$

En effet, puisque l'équation $V-\alpha=0$ deviendrait identique par la substitution des valeurs de x' et y' en fonction de x, y, α, β, on pourrait, après la substitution, égaler à zéro sa différentielle par rapport à β, α étant considérée comme constante ; ou, ce qui revient au même, on peut différentier d'abord l'équation, par rapport à β, en y regardant x' et y' comme des fonctions implicites de β, et ne substituer leurs valeurs qu'après la différentiation. On a ainsi

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right)\frac{dx'}{d\beta}+\left(\frac{dV}{dy'}\right)\frac{dy'}{d\beta}=0.$$

Remplaçons dans cette identité x' par $\frac{d\Theta}{dx}$, y' par $\frac{d\Theta}{dy}$, et intervertissons l'ordre des différentiations : nous aurons en-

core identiquement

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx'}\right)\frac{d.\frac{d\Theta}{d\beta}}{dx}+\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy'}\right)\frac{d.\frac{d\Theta}{d\beta}}{dy}=0;$$

donc $\frac{d\Theta}{d\beta}$ satisfait à l'équation (4), puisque d'ailleurs cette fonction ne contient pas t; par suite,

$$\frac{d\Theta}{d\beta}=\beta'$$

(β' désignant une constante arbitraire), sera une troisième intégrale des équations (1).

En différentiant l'équation $\mathrm{V}-\alpha=0$ par rapport à α, on trouvera de même l'identité

$$-1+\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx'}\right)\frac{d.\frac{d\Theta}{d\alpha}}{dx}+\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy'}\right)\frac{d.\frac{d\Theta}{d\alpha}}{dy}=0.$$

Ce qui prouve que la fonction $\frac{d\Theta}{d\alpha}-t$ satisfait à l'équation (4); donc la quatrième intégrale sera

$$\frac{d\Theta}{d\alpha}=t+\alpha'.$$

C. Q. F. D.

A la rigueur, on aurait pu s'arrêter à la troisième intégrale $\frac{d\Theta}{d\beta}=\beta'$, et regarder le problème d'intégration des équations (1) comme résolu, puisqu'il était réduit aux quadratures : en effet, les trois premières intégrales fournissant les valeurs des trois variables x', y', y en fonction de x; si l'on substituait ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\mathrm{V}}{dx'},$$

on aurait

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\alpha,\beta,\beta'),$$

d'où

$$t+\alpha' = \int \frac{dx}{f(x, \alpha, \beta, \beta')}.$$

Mais ce calcul est moins simple que le précédent, parce qu'il exige une quadrature de plus.

Nota. Les équations $V=\alpha$, $F=\beta$, ne cesseraient pas d'être les intégrales des équations (1), si l'on introduisait dans celles-ci un facteur λ fonction de t et de V, en sorte que les équations devinssent

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{dV}{dx'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\lambda \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{dV}{dy'}; \quad \frac{dy'}{dt} = -\lambda \frac{dV}{dy};$$

car d'abord le facteur λ disparaîtra de l'équation (2), quand on y remplacera φ par V ou par F, et cela, *quel que soit ce facteur,* fonction de V ou non; puis, si λ est fonction de t et de V, il deviendra, en vertu de $V=\alpha$, une simple fonction de t qu'on pourra faire passer en diviseur avec dt, dans les équations différentielles; en posant $\lambda dt = d\tau$, τ sera une fonction de t connue par la quadrature $\int \lambda dt$; $d\tau$ remplacera dt dans les calculs précédents, et l'on trouvera pour quatrième intégrale

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = \tau + \alpha'.$$

2. *Applications.* — Nous ferons d'abord, en peu de mots, l'application de cette méthode d'intégration au problème du mouvement d'un point matériel sollicité par une force dirigée vers un centre fixe et fonction de la distance.

Ces équations sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r},$$

en prenant le plan de la trajectoire pour plan des xy, le centre fixe pour origine, et désignant par r le rayon vec-

teur du mobile, et par R la fonction de r qui représente la force. Soit

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \int \mathrm{R}\,dr + \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2).$$

Au lieu des deux équations du second ordre, on aura le système équivalent des quatre équations du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{V}}{dx'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\mathrm{V}}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{d\mathrm{V}}{dy}.$$

Ainsi, le problème pourra être résolu par la méthode développée plus haut.

$\mathrm{V} = \alpha$, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int \mathrm{R}\,dr = \alpha$$

est une première intégrale. On y reconnaît l'*équation des forces vives*.

Le principe des aires fournit la deuxième équation

$$xy' - yx' = \beta.$$

Ces deux intégrales ne sont, relativement au problème de dynamique qui nous occupe, que des équations différentielles du premier ordre, ou, suivant l'expression de M. Hamilton, des *intégrales intermédiaires* propres seulement à faire connaître les composantes de la vitesse du mobile, lorsque x et y seront déterminées en fonction du temps. Pour avoir les deux autres équations qui sont les véritables intégrales en quantités finies du problème, on tirera des deux premières les valeurs de x' et y' en fonction de x, y, α et β; puis on formera la différentielle $x'dx + y'dy$. On trouve ainsi

$$x'\,dx + y'\,dy = \frac{\beta(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2} + \psi(r)\,dr.$$

En posant, pour abréger,

$$\pm\frac{1}{r}\sqrt{2(\mathrm{U} + \alpha)r^2 - \beta^2} = \psi(r), \quad \int \mathrm{R}\,dr = -\mathrm{U},$$

conformément à la théorie, cette différentielle est immédiatement intégrable et donne

$$\Theta = \beta \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} + \int \psi(r)\, dr,$$

ou bien, en désignant par θ l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x,

$$\Theta = \beta\theta + \int \psi(r)\, dr.$$

Il ne reste plus qu'à différentier la fonction Θ successivement par rapport à β et α [β et α entrent dans $\psi(r)$], puis on posera

$$\frac{d\Theta}{d\beta} = \beta' \quad \text{et} \quad \frac{d\Theta}{d\alpha} = t + \alpha'.$$

La solution complète du problème est ainsi réduite à ne dépendre que d'une seule quadrature $\int \psi(r)\, dr$.

Au lieu d'intégrer $\psi(r)\, dr$, pour différentier ensuite l'intégrale par rapport à β et α, il sera, dans certains cas, préférable de différentier d'abord sous le signe $\int$ et de n'intégrer qu'après. Les deux intégrales se présenteront alors sous la forme suivante,

$$\theta - \beta' = \pm \beta \int \frac{dr}{r\sqrt{2(\mathrm{U}+\alpha)r^2 - \beta^2}},$$

$$t + \alpha' = \pm \int \frac{rdr}{\sqrt{2(\mathrm{U}+\alpha)r^2 - \beta^2}}.$$

Supposons, par exemple, que la force centrale soit en raison inverse du carré de la distance

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{r^2}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{U} = \frac{\mu}{r},$$

et l'on aura, par ces formules,

$$\theta - \beta' = \beta \int \frac{dr}{r\sqrt{2\alpha r^2 + 2\mu r - \beta^2}} = \operatorname{arc cos} \frac{\beta^2 - \mu r}{r\sqrt{\mu^2 + 2\alpha\beta^2}},$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\frac{\beta^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{\mu^2}\cos(\theta - \beta')}} \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \beta')},$$

en posant

$$1 + \frac{2\alpha\beta^2}{\mu^2} = e^2 \quad \text{et} \quad \frac{\beta^2}{\mu} = a(1 - e^2);$$

a et e sont des constantes arbitraires qui remplacent α et β. Cette équation détermine la trajectoire, section conique dont le centre fixe est un foyer. Enfin, la position du mobile au bout du temps t est connue par la dernière intégrale

$$t + \alpha' = \int \frac{rdr}{\sqrt{2\alpha r^2 + 2\mu r - \beta^2}}.$$

Si l'on y remplace 2α par $-\frac{\mu}{a}$, et β^2 par $\mu a(1 - e^2)$, il vient

$$t + \alpha' = \int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}}.$$

Pour simplifier, on pose

$$\frac{\mu}{a^3} = n^2,$$

et l'on a

$$na(t + \alpha') = \int \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}};$$

mais l'expression de t en r, sous forme finie, n'étant pas d'un usage commode, on préfère introduire la variable u ou l'*anomalie excentrique*, en posant

$$r = a(1 - e\cos u),$$

et l'intégrale précédente se réduit à

$$nt = u - e \sin u,$$

en comptant le temps à partir de l'époque où $u = 0$.

Nous ne poursuivrons pas plus loin la solution bien connue de ce problème.

Revenons à la fonction Θ, dont l'expression, dans le cas d'une force centrale quelconque, a été trouvée

$$\Theta = \beta \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \int \frac{dr}{r\sqrt{2(\mathrm{U} + \alpha) r^2 - \beta^2}}.$$

D'après la manière dont cette fonction Θ a été calculée, on a

$$\frac{d\Theta}{dx} = x' = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\Theta}{dy} = y' = \frac{dy}{dt}.$$

On peut donc remplacer dans l'équation des forces vives x' par $\frac{d\Theta}{dx}$, y' par $\frac{d\Theta}{dy}$, et l'on a identiquement

$$(5) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + \alpha).$$

Ainsi *la fonction Θ vérifie identiquement cette équation aux différences partielles du premier ordre.*

Réciproquement, si l'on trouve une fonction Θ de x et y, contenant deux constantes arbitraires α, β, autres que celle qu'on peut y introduire par simple addition, et vérifiant identiquement l'équation (5), les intégrales complètes des équations différentielles

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mathrm{R}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mathrm{R}\frac{y}{r}$$

seront

$$\frac{d\Theta}{d\beta} = \beta', \quad \frac{d\Theta}{d\alpha} = t + \alpha',$$

α' et β' étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Cette proposition remarquable, qui permet d'exprimer

les intégrales finies du mouvement par les dérivées partielles d'une seule fonction θ, satisfaisant à une équation aux différences partielles du premier ordre, n'a pas seulement lieu dans le cas d'un point sollicité par une force dirigée vers un centre fixe; elle s'étend à tout système libre de points matériels, dans lequel la *fonction des forces* U ne contient pas le temps t explicitement.

L'idée première de ce théorème est due à M. Hamilton (*Transactions philosophiques*, 1834 et 1835). Mais ce savant avait cru que la fonction Θ devait être assujettie à satisfaire en même temps à *deux équations* aux différences partielles, tandis qu'*une seule équation suffit*, ainsi que l'a fait voir M. Jacobi (*Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1838, page 60).

Il ne sera pas inutile de rapporter ici la démonstration de M. Jacobi, en nous bornant, pour simplifier, au cas d'un seul point matériel, ce qui n'altérera en rien le fond de la démonstration.

Continuons à désigner par U la fonction de x, y, z sans t, dont les dérivées partielles représentent les composantes de la force accélératrice appliquée au mobile; les équations différentielles du mouvement sont :

$$(6) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz},$$

et le théorème à démontrer peut s'énoncer ainsi :

Soit Θ une fonction de x, y, z contenant trois constantes arbitraires α, β, γ (autres que celle qu'on peut toujours introduire dans cette fonction par simple addition) *et vérifiant identiquement l'équation aux différences partielles*

$$(7) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2(U + \alpha).$$

Les équations (6) *auront pour intégrales complètes*

$$(8)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha}=t+\alpha',\quad \frac{d\Theta}{d\beta}=\beta',\quad \frac{d\Theta}{d\gamma}=\gamma',$$

α', β', γ' *étant trois nouvelles constantes arbitraires; et les trois intégrales intermédiaires*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\Theta}{dx},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\Theta}{dy},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{d\Theta}{dz},$$

feront connaître les composantes de la vitesse suivant les axes des coordonnées.

Démonstration. — Si nous différentions les équations (8) par rapport à t, les constantes α', β', γ' disparaissent, et il vient

$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dz}\frac{dz}{dt}=1,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dz}\frac{dz}{dt}=0,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dz}\frac{dz}{dt}=0.$$

Ces équations déterminent les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Or si on les compare aux trois identités qu'on déduit de l'équation (7), en la différentiant partiellement par rapport à α, β, γ, savoir,

$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dx}\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dy}\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha\,dz}\frac{d\Theta}{dz}=1,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dx}\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dy}\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{d\beta\,dz}\frac{d\Theta}{dz}=0,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dx}\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dy}\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{d\gamma\,dz}\frac{d\Theta}{dz}=0,$$

on reconnaît immédiatement que les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, tirées du premier système, sont respectivement les

mêmes que celles de $\frac{d\Theta}{dx}$, $\frac{d\Theta}{dy}$, $\frac{d\Theta}{dz}$, tirées du second système. Donc on a déjà

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\Theta}{dx}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\Theta}{dy}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{d\Theta}{dz}.$$

Différentiant de nouveau ces dernières expressions, par rapport à t, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\Theta}{dx^2}\cdot\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{dxdy}\cdot\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{dxdz}\cdot\frac{d\Theta}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2\Theta}{dxdy}\,\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{dy^2}\,\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{dydz}\,\frac{d\Theta}{dz},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2\Theta}{dxdz}\,\frac{d\Theta}{dx}+\frac{d^2\Theta}{dydz}\,\frac{d\Theta}{dy}+\frac{d^2\Theta}{dz^2}\,\frac{d\Theta}{dz}.$$

Or les seconds membres sont précisément les dérivées partielles de la fonction U, qu'on tirerait de l'équation (7); donc on a

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dU}{dz}.$$

Les équations (6) sont donc satisfaites par les valeurs de x, y, z, en fonction du temps, tirées des équations (8); ce qu'il fallait démontrer.

Nota. Puisque la fonction des forces U ne renferme pas t explicitement, le principe des forces vives a lieu, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)=2(U+c),$$

c étant une constante, ou bien, d'après ce qui précède,

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2=2(U+c).$$

Il résulte de là que la constante α de l'équation (7) n'est autre que la constante c qui entre dans l'équation des forces vives.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la fonction des forces U ne renfermait pas le temps; si le contraire avait lieu, comme, par exemple, dans le cas d'un point attiré par des centres mobiles, la fonction Θ ne serait plus indépendante du temps, elle serait remplacée par une fonction S, vérifiant identiquement l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2+2\frac{dS}{dt}=2U.$$

On démontrerait, par des calculs semblables aux précédents, que les trois intégrales complètes du mouvement seraient

$$\frac{dS}{d\alpha}=\alpha',\quad \frac{dS}{d\beta}=\beta',\quad \frac{dS}{d\gamma}=\gamma',$$

et l'on aurait toujours les intégrales intermédiaires

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dS}{dx},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dS}{dy},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dS}{dz}.$$

Ce cas doit comprendre celui que nous avons traité plus haut; et, en effet, lorsque U est indépendante de t, le principe des forces vives, combiné avec les intégrales intermédiaires, donne

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2+\left(\frac{dS}{dz}\right)^2=2(U+\alpha);$$

on en conclut

$$\frac{dS}{dt}=-\alpha,$$

et si l'on pose

$$\Theta=S+\alpha t,$$

Θ sera une fonction de $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma,)$ sans t, vérifiant l'équation (7). La première des intégrales ci-dessus $\frac{dS}{d\alpha}=\alpha'$,

deviendra

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = t + \alpha';$$

les autres seront composées en Θ comme en S. On retrouvera ainsi les intégrales (8).

La première partie de ce travail a été rédigée d'après une Leçon de M. Liouville au Collége de France.

Le lecteur, curieux d'approfondir cette importante théorie et de connaître les applications dont elle est susceptible, pourra consulter le Mémoire, déjà cité, de M. Jacobi, et le second Mémoire de M. Liouville, *sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer* (*Journal de Mathématiques*, page 410; 1847).

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENTS SUR LE CALCUL DES VARIATIONS.

1. *Sur la recherche des maxima ou minima de l'intégrale* $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$, *dans le cas où les deux fonctions inconnues* y *et* z *que* V *renferme, sont assujetties à satisfaire à une équation différentielle*

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots) = 0.$$

Rappelons d'abord la méthode que l'on suit, lorsque l'équation, à laquelle les fonctions y et z doivent satisfaire, est une équation *finie*

$$F(x, y, z) = 0;$$

c'est-à-dire, lorsque la ligne qui doit jouir de la propriété du maximum ou du minimum, est assujettie à être située sur la surface représentée par cette équation. On en conclut, entre les variations δx, δy, δz, la relation

$$(\Delta) \qquad \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0,$$

d'où l'on peut tirer δz en fonction de δx et δy, et substituer sous le signe $\int$ dans l'expression $\int_{x_0}^{x_1}\delta(V\,dx)$, qui ne renfermera plus alors que les deux variations indépendantes δx, δy; mais comme la quantité sous le signe $\int$ qui doit être égalée à zéro est de la forme $A\omega + A'\omega'$, il est préférable de remplacer dans l'équation (Δ), δy et δz par leurs valeurs

$$\delta y = y'\delta x + \omega, \quad \delta z = z'\delta x + \omega';$$

et, en ayant égard à l'équation

$$dF = 0,$$

ou

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} z' = 0,$$

l'équation (Δ) se réduit à

$$\frac{dF}{dy} \omega + \frac{dF}{dz} \omega' = 0.$$

Tirant de là le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, et le substituant dans l'équation

$$A\omega + A'\omega' = 0,$$

il vient

$$A \frac{dF}{dz} - A' \frac{dF}{dy} = 0.$$

En posant

$$dV = M dx + N dy + P dy' + Q dy'' + \ldots + N' dz + P' dz' + Q' dz'' + \ldots,$$

on a

$$A = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots, \quad A' = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots;$$

à l'équation précédente il faut associer

$$F(x, y, z) = 0.$$

Ces deux équations déterminent y et z en fonction de x.

Cette méthode doit être modifiée, lorsque l'équation qui a lieu entre y et z n'est pas finie, mais différentielle, telle que l'équation (1). Voici le procédé général à suivre.

Puisque l'équation (1) doit être satisfaite par les valeurs de x, y, z qui répondent à tous les éléments de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, on aura, pour chacun de ces éléments,

$$(2) \qquad \delta F = 0.$$

Il en résulte entre les variations δx, δy, δz, de ces divers

éléments, une infinité d'équations de condition, qu'il faut associer à

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \delta(\mathrm{V}\,dx) = 0.$$

Pour employer la méthode des multiplicateurs, concevons chacune des équations (2) multipliées par un coefficient indéterminé, variant de l'une à l'autre, et qu'on peut représenter par une fonction (λdx) de x; ajoutons la somme de ces produits

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda\,\delta\mathrm{F}\,dx = 0$$

à l'équation (3), ce qui donnera

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \delta(\mathrm{V}\,dx) + \lambda\,\delta\mathrm{F}\,dx = 0;$$

puis, considérant toutes les variations comme indépendantes, nous égalerons à zéro tous leurs coefficients.

A cet effet, il faut développer l'équation (4). En effectuant la différentiation indiquée par δ dans le terme $\mathrm{V}dx$, et intégrant par parties, on a d'abord

$$(5)\qquad \left(\mathrm{V}\,\delta x\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} dx\,\delta\mathrm{V} - d\mathrm{V}\,\delta x + \lambda\,\delta\mathrm{F}\,dx = 0.$$

Le binôme $dx\,\delta\mathrm{V} - d\mathrm{V}\,\delta x$ prend, comme on sait, la forme suivante :

$$dx\,\delta\mathrm{V} - d\mathrm{V}\,\delta x = \mathrm{N}\omega + \mathrm{P}\frac{d\omega}{dx} + \mathrm{Q}\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots + \mathrm{N}'\omega' + \mathrm{P}'\frac{d\omega'}{dx} + \mathrm{Q}'\frac{d^2\omega'}{dx^2} + \ldots.$$

Soit

$$d\mathrm{F} = m\,dx + n\,dy + p\,dy' + q\,dy'' + \ldots + n'\,dz + p'\,dz' + q'\,dz'' + \ldots.$$

On aura

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{F} &= m\,\delta x + n\,\delta y + p\,\delta y' + q\,\delta y'' + \ldots + n'\,\delta z + p'\,\delta z' + q'\,\delta z'' + \ldots\\ &= \delta x(m + ny' + py'' + qy''' + \ldots) + n\omega + p\frac{d\omega}{dx} + q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots\\ &\qquad + n'\omega' + p'\frac{d\omega'}{dx} + q'\frac{d^2\omega'}{dx^2} + \ldots.\end{aligned}$$

Le coefficient de δx est nul, en vertu de l'équation

$$dF = 0;$$

il reste donc

$$\delta F = n\omega + p\frac{d\omega}{dx} + q\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots + n'\omega' + p'\frac{d\omega'}{dx} + q'\frac{d^2\omega'}{dx^2} + \ldots.$$

L'équation (5) devient

$$\left(V\delta x\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\begin{array}{l}(N+\lambda n)\omega + (P+\lambda p)\frac{d\omega}{dx} + (Q+\lambda q)\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots \\ +(N'+\lambda n')\omega' + (P'+\lambda p')\frac{d\omega'}{dx} + (Q'+\lambda q')\frac{d^2\omega'}{dx^2} + \ldots\end{array}\right]dx = 0.$$

Conformément à la théorie des variations, on intègre par parties pour faire disparaître, sous le signe $\int$, les indices de différentiation auxquels sont soumises les fonctions arbitraires ω, ω'; et l'on trouve

$$\left(\Omega\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(B\omega + B'\omega')\,dx = 0,$$

en posant

$$\Omega = V\delta x + \left[(P+\lambda p) - \frac{d(Q+\lambda q)}{dx} + \ldots\right]\omega + [(Q+\lambda q) - \ldots]\frac{d\omega}{dx} + \ldots$$
$$+ \left[(P'+\lambda p') - \frac{d(Q'+\lambda q')}{dx} + \ldots\right]\omega' + [(Q'+\lambda q') - \ldots]\frac{d\omega'}{dx} + \ldots,$$

$$B = (N+\lambda n) - \frac{d(P+\lambda p)}{dx} + \frac{d^2(Q+\lambda q)}{dx^2} - \ldots,$$

$$B' = (N'+\lambda n') - \frac{d(P'+\lambda p')}{dx} + \frac{d^2(Q'+\lambda q')}{dx^2} - \ldots.$$

Actuellement on égalera à zéro les coefficients de toutes les variations, ce qui donnera, pour un point quelconque de la ligne représentée par les équations cherchées,

(6) $$B = 0, \quad B' = 0,$$

et pour les points limites,

(7) $$(\Omega)_{x_1} - (\Omega)_{x_0} = 0.$$

Entre les équations (6) on éliminera l'indéterminée λ; et l'équation résultante, combinée avec l'équation (1), fournira la solution du problème. L'équation aux limites (7) servira à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

Il est aisé de s'assurer que cette méthode, appliquée au cas où l'équation qui lie y et z est une équation finie,

$$F(x, y, z) = 0,$$

conduira à l'équation déjà trouvée. En effet, il faut faire, dans les résultats précédents,

$$p = 0, \quad q = 0, \ldots$$
$$p' = 0, \quad q' = 0 \ldots .$$

Alors les équations (6) se réduisent à

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots + \lambda n = 0, \quad \text{ou} \quad A + \lambda \frac{dF}{dy} = 0,$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots + \lambda n' = 0, \quad \text{ou} \quad A' + \lambda \frac{dF}{dz} = 0.$$

Ici l'indéterminée λ n'est soumise à aucun indice de différentiation, en sorte que l'élimination se fait immédiatement, et fournit l'équation

$$A \frac{dF}{dz} - A' \frac{dF}{dy} = 0.$$

Quant à l'équation aux limites, elle est indépendante de λ.

2. Nous allons appliquer la méthode des variations à la recherche de certaines relations générales qui existent entre les coefficients p, q, r, d'une expression différentielle $pdx + qdy + rdz$, assujettie à diverses conditions, et dans laquelle x, y, z sont des fonctions indéterminées d'une variable indépendante t. Ces relations se présentent dans plusieurs théories importantes de la dynamique, telles que le principe des forces vives et celui de la moindre action.

Proposons-nous d'abord de déterminer *quelles conditions doivent remplir les fonctions p, q, r des variables x, y, z pour que l'intégrale définie*

$$\int_{x_0}^{x_1} (pdx + qdy + rdz)$$

conserve une valeur constante, quelles que soient les fonctions de t que x, y et z représentent.

(Les fonctions y et z sont seulement assujetties à prendre des valeurs fixes (y_0, z_0), (y_1, z_1) pour les limites x_0, x_1.)

D'après l'énoncé, on doit avoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(pdx + qdy + rdz) = 0.$$

On développera cette condition par la méthode des variations; et, pour abréger, on pourra ne pas attribuer de variations à x, attendu que les limites de l'intégrale sont fixes. Il vient

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \begin{array}{l} dx\left[\left(\frac{dp}{dy}+\frac{dq}{dy}y'+\frac{dr}{dy}z'\right)\delta y+\left(\frac{dp}{dz}+\frac{dq}{dz}y'+\frac{dr}{dz}z'\right)\delta z\right] \\ \qquad + qd\delta y + rd\delta z \end{array} \right\} = 0,$$

en désignant, comme à l'ordinaire, par y' et z' les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

On intègre par parties les deux derniers termes affectés de la double caractéristique $d\delta$,

$$\int_{x_0}^{x_1} qd\delta y = \left(q\delta y\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left(\frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy}y' + \frac{dq}{dz}z'\right) dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} rd\delta z = \left(r\delta z\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta z \left(\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dy}y' + \frac{dr}{dz}z'\right) dx.$$

Substituant dans la première équation, et omettant les

termes dégagés du signe $\int$, qui sont nuls aux deux limites, il vient

$$o = \int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ \left[\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + \left(\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\right) z'\right] \delta y + \left[\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx} + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}\right) y'\right] \delta z \right\}.$$

Il faut maintenant égaler à zéro, séparément, les groupes de termes multipliés par δy et δz :

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + \left(\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\right) z' = o,$$

$$\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx} + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}\right) y' = o;$$

et comme ces deux équations doivent subsister, quelles que soient y' et z', on en conclut

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \frac{dq}{dz} = \frac{dr}{dy}, \quad \frac{dr}{dx} = \frac{dp}{dz}.$$

Ces équations expriment que la quantité $pdx + qdy + rdz$ *doit être une différentielle exacte relativement aux trois variables* x, y, z, *considérées comme indépendantes.*

Telles sont les conditions cherchées. Nous n'avons considéré que trois variables; mais il est évident que pour tout autre nombre on arriverait, à l'aide des mêmes calculs, à la même conclusion.

Réciproquement, si l'on a

$$pdx + qdy + rdz = d.\varphi(x, y, z),$$

et qu'on imagine deux relations arbitraires entre y, z et x, telles que pour $x = x_0$ on ait

$$y = y_0, \quad z = z_0,$$

et pour $x = x_1$,

$$y = y_1, \quad z = z_1,$$

l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_1} (pdx + qdy + rdz)$$

conservera une valeur constante, quelles que soient les fonctions de x que y et z représentent.

En effet, puisque l'on a, en considérant les variables x, y, z comme indépendantes,

$$\int (pdx + qdy + rdz) = \varphi(x, y, z) + \text{const.},$$

cette équation subsistera encore, lorsqu'on établira entre ces variables telles liaisons qu'on voudra. Si donc l'on conçoit que y et z soient des fonctions de x qui, pour $x = x_0$, prennent les valeurs y_0, z_0, et pour $x = x_1$, les valeurs y_1, z_1; on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} (pdx + qdy + rdz) = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0),$$

résultat constant, quelles que soient les fonctions de x qu'on choisira pour y et z.

C'est ainsi qu'en mécanique, lorsqu'il existe une fonction des forces, c'est-à-dire quand on a

$$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = d.\varphi(x, y, z \ldots),$$

l'accroissement de la somme des forces vives de tous les points du système passant d'une position à une autre, est représenté par

$$\Sigma m \mathrm{V}_1^2 - \Sigma m \mathrm{V}_0^2 = 2[\varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)],$$

et cet accroissement ne dépend que des coordonnées des mobiles à ces deux limites, et nullement des courbes qu'ils ont pu décrire pour passer de la première position à la seconde. Mais il résulte de ce qui précède, que l'accroissement de force vive dépendra, au contraire, des chemins parcourus dans l'intervalle des deux positions, toutes les fois qu'il n'existera pas de *fonction des forces*.

3. *On suppose que la différentielle d'une fonction* T *de la variable indépendante t soit*

$$d\mathrm{T} = pdx + qdy + rdz,$$

où x, y, z sont des fonctions quelconques de t, et p, q, r des fonctions de x, y, z, pouvant contenir t; et l'on propose de déterminer quelles conditions p, q, r doivent remplir, pour qu'en attribuant à x, y, z des variations arbitraires δx, δy, δz, l'expression correspondante de δT se déduise de dT par le simple changement des d en δ, en sorte que l'on ait

$$\delta T = p\delta x + q\delta y + z\delta z.$$

Puisque
$$T = \int pdx + qdy + rdz,$$
on aura
$$\delta T = \int \delta(pdx + qdy + rdz)$$
$$= \int \delta p . dx + \delta q . dy + \delta r . dz + p\delta dx + q\delta dy + r\delta dz,$$

et intégrant par parties les termes où les caractéristiques d, δ sont superposées,

$$\delta T = p\delta x + q\delta y + r\delta z$$
$$-\int (\delta x dp - dx\delta p) + (\delta y dq - dy\delta q) + (\delta z dr - dz\delta r).$$

Remplaçons sous le signe $\int$, dp, δp, dq, δq, dr, δr par leurs valeurs, savoir,

$$dp = \frac{dp}{dt}dt + \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz,$$
$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y + \frac{dp}{dz}\delta z,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(on ne doit pas faire varier t dans le calcul de δp), il vient

$$\delta T = p\delta x + q\delta y + r\delta z - \int \left[\frac{dp}{dt}dt + \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx}\right)dz\right]\delta x$$
$$+ \left[\frac{dq}{dt}dt + \left(\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy}\right)dx + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}\right)dz\right]\delta y$$
$$+ \left[\frac{dr}{dt}dt + \left(\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dz}\right)dx + \left(\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\right)dy\right]\delta z.$$

D'après l'énoncé, la quantité soumise au signe $\int$ doit être nulle; et comme δx, δy, δz sont des variations arbitraires, on aura les trois équations,

$$\left(\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}\right)\frac{dy}{dt}+\left(\frac{dp}{dz}-\frac{dr}{dx}\right)\frac{dz}{dt}=-\frac{dp}{dt},$$
$$\left(\frac{dq}{dx}-\frac{dp}{dy}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dq}{dz}-\frac{dr}{dy}\right)\frac{dz}{dt}=-\frac{dq}{dt},$$
$$\left(\frac{dr}{dx}-\frac{dp}{dz}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dr}{dy}-\frac{dq}{dz}\right)\frac{dy}{dt}=-\frac{dr}{dt}.$$

Mais le dénominateur commun des valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ qu'on tirerait de ces équations étant nul, il faut, pour qu'elles ne soient pas impossibles, que les seconds membres soient nuls aussi. On aura donc

$$\frac{dp}{dt}=0,\quad \frac{dq}{dt}=0,\quad \frac{dr}{dt}=0;$$

ce qui prouve déjà que les *fonctions* p, q, r *ne doivent pas contenir* t. Cela posé, l'une des trois équations précédentes sera une conséquence des deux autres; mais, comme celles-ci doivent subsister indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, on devra égaler séparément à zéro les coefficients des différentielles dx, dy, dz, ce qui fournira les trois équations

$$(1)\qquad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},\quad \frac{dq}{dz}=\frac{dr}{dy},\quad \frac{dr}{dx}=\frac{dp}{dz}.$$

Ce sont, comme dans la question précédente, les *conditions nécessaires et suffisantes pour que* $pdx+qdy+rdz$ *soit une différentielle exacte par rapport à* x, y, z *considérées comme variables indépendantes.*

4. Examinons maintenant si les conditions précédentes

subsisteraient dans l'hypothèse où x, y, z seraient liées par une équation finie,

$$z = \mathrm{F}(x, y).$$

Il en résulte, entre les variations δx, δy, δz, la relation

$$\delta z = \mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y,$$

où l'on désigne par P et Q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$.

Dans ce cas, on ne devra plus égaler à zéro, sous le signe $\int$, les coefficients des trois variations δx, δy, δz, puisqu'elles ne sont plus indépendantes ; mais si l'on commence par y remplacer l'une d'elles, δz, par sa valeur

$$\mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y,$$

la quantité sous le signe $\int$ prendra la forme

$$(\mathrm{A} + \mathrm{CP})\delta x + (\mathrm{B} + \mathrm{CQ})\delta y,$$

en désignant, pour abréger, par A, B, C les coefficients primitifs de δx, δy, δz.

Pour que l'expression de $\delta\mathrm{T}$ garde la forme

$$p\delta x + q\delta y + r\delta z,$$

on devra poser

$$\mathrm{A} + \mathrm{CP} = 0, \quad \mathrm{B} + \mathrm{CQ} = 0.$$

Ces deux équations rentrent l'une dans l'autre, eu égard à la relation

$$dz = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

et l'on a ainsi l'unique condition

$$(2) \quad \frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + \mathrm{P}\left(\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx}\right) = 0.$$

On y satisfait en posant les équations (1), c'est-à-dire que si $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ est une différentielle exacte par rapport aux trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes, l'expression de $\delta\mathrm{T}$ se déduira de $d\mathrm{T}$ en changeant

les d en δ; mais *cette condition n'est plus nécessaire*. L'équation (2) exprime seulement que la *quantité*

$$pdx + qdy + rdz$$

doit devenir une différentielle exacte après qu'on en aura éliminé une variable à l'aide de l'équation

$$z = \mathrm{F}(x, y).$$

En effet, on a

$$pdx + qdy + rdz = (p + r\mathrm{P})\,dx + (q + r\mathrm{Q})\,dy,$$

et si l'on développe la condition

$$\frac{d.(p + r\mathrm{P})}{dy} = \frac{d(q + r\mathrm{Q})}{dx},$$

en y regardant z comme égale à $\mathrm{F}(x, y)$, et ayant égard à la condition

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy} = \frac{d\mathrm{Q}}{dx},$$

on retrouve l'équation (2).

Les raisonnements et les conclusions précédentes s'étendraient sans modification au cas d'une expression différentielle renfermant plus de trois variables x, y, z,..., liées ou non par des équations de condition.

En mécanique, lorsqu'on veut établir le *principe de la moindre action*, on considère un système de points matériels, assujettis à certaines liaisons exprimées par des équations entre leurs coordonnées x, y, z, x',..., où le temps t n'entre pas explicitement. Ces points sont soumis à l'action de forces (X, Y, Z,) telles que l'on ait

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d.\varphi(x, y, z, x', ..),$$

et, en désignant par V la vitesse du point dont la masse est m, on a

$$\tfrac{1}{2} d\Sigma m\mathrm{V}^2 = \Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

La démonstration du principe de la moindre action

$$(\Sigma \int m\mathrm{V}\, ds = \text{minimum})$$

exige qu'on prenne la variation de $\Sigma m\mathrm{V}^2$; et, à cet effet, on tire immédiatement de l'équation précédente,

$$\tfrac{1}{2}\delta \Sigma m \mathrm{V}^2 = \Sigma(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z).$$

On voit, par ce qui précède, que cette conclusion ne serait plus admissible si l'expression

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

n'était pas une différentielle exacte, par rapport à toutes les variables $x, y, z, x', \ldots$ considérées comme indépendantes, ou du moins si elle n'était pas susceptible de devenir différentielle exacte, après qu'on aurait éliminé un nombre de variables égal au nombre des équations qui les lient.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES D'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA REPRÉSENTATION D'UNE SURFACE SPHÉRIQUE SUR UN PLAN.

La position d'un point sur une surface est en général définie par deux coordonnées. Si l'on désigne par (t, u) les coordonnées d'un point quelconque d'une première surface, par (x, y) les coordonnées d'un point d'une autre surface, et qu'on pose arbitrairement deux équations entre x, y, t, u,

$$x = f(t, u), \quad y = F(t, u),$$

à chaque couple de valeurs de t et u, c'est-à-dire à chaque point de la première surface, correspondra un couple de valeurs pour x et y, c'est-à-dire un point de la seconde surface. Il existera entre les éléments géométriques corrélatifs des deux figures, certains rapports de grandeur et de forme qui dépendront du choix des fonctions f et F. Nous nous proposons de rechercher quels sont ces rapports, en supposant que la première surface soit une sphère, et l'autre un plan.

1. Théorème. — *Une portion de surface sphérique ne saurait être exactement représentée sur un plan par une surface égale et superposable à la première.*

La position d'un point p sur la surface de la sphère (*fig.* 2)

4.

est déterminée par sa *longitude* $Aa = t$, comptée à partir d'un méridien convenu BAC, et par sa *latitude* $ap = u$. Soit $pqrs$ un élément de surface compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins, on aura

$$pq = du \quad \text{et} \quad pr = \cos u . dt$$

(le rayon de la sphère étant pris pour unité).

On peut considérer cet élément comme un rectangle, dont l'aire sera mesurée par

$$pq . pr = \cos u . du\, dt.$$

Soit P un point du plan que nous regarderons comme correspondant au point p, et dont les coordonnées x et y seront des fonctions, prises à volonté, des deux variables t et u. Au point q, qui naît du point p par le changement de u en $u + du$, correspondra sur le plan un point Q, dont les coordonnées seront

$$(\text{Q}) \qquad x + \frac{dx}{du} du, \quad y + \frac{dy}{du} du;$$

de même, les coordonnées du point R, correspondant de r, seront

$$(\text{R}) \qquad x + \frac{dx}{dt} dt, \quad y + \frac{dy}{dt} dt;$$

enfin les coordonnées de S, correspondant de s, seront

$$(\text{S}) \qquad x + \frac{dx}{dt} dt + \frac{dx}{du} du, \quad y + \frac{dy}{dt} dt + \frac{dy}{du} du.$$

On en conclut

$$\text{PQ} = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \text{RS},$$

$$\text{PR} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \text{QS},$$

donc l'*élément plan* PQRS *est un parallélogramme*, quelles que soient les fonctions de t et de u que x et y représentent.

Les côtés PQ, PR représentent sur le plan l'élément du méridien et l'élément du parallèle; si l'on désigne par φ et ψ les inclinaisons respectives de ces côtés sur l'axe des x, on a

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{du} : \frac{dx}{du}, \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt};$$

on en conclut

$$\operatorname{tang} \mathrm{QPR} = \frac{\frac{dy}{du}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{du}}{\frac{dx}{dt}\frac{dx}{du} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{du}},$$

et, par suite, l'aire du parallélogramme PQRS est

$$\mathrm{PQ}.\mathrm{PR}.\sin \mathrm{QPR} = \left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}\right) du\, dt.$$

Actuellement posons les *conditions pour que l'élément plan* PQRS *soit un rectangle égal à l'élément sphérique pqrs*. Ces conditions sont au nombre de trois, savoir :

$$\mathrm{PQ} = pq, \quad \mathrm{PR} = pr, \quad \text{angle QPR} = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire :

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 u,$$

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt}\frac{dx}{du} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{du} = 0.$$

Ce sont trois équations aux différences partielles du premier ordre, entre x, y, et les variables indépendantes t et u.

Il s'agit de prouver qu'il n'est pas possible de déterminer pour x et y, des fonctions de t et u, telles que ces trois équations soient satisfaites; à cet effet, nous introduirons,

avec Euler (*), l'angle φ déjà défini plus haut par l'équation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{du} : \frac{dx}{du};$$

φ est une fonction inconnue de t et u. Les trois équations ci-dessus seront remplacées par les quatre suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \sin \varphi \cos u, \qquad \frac{dx}{du} = \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\cos \varphi \cos u, \quad \frac{dy}{du} = \sin \varphi.$$

Les deux premières font connaître les dérivées partielles de la fonction x par rapport à t et u : elles doivent donc remplir la condition d'intégrabilité

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{du} = \frac{d\frac{dx}{du}}{dt};$$

en la développant, on a

$$\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \cos u \frac{d\varphi}{du} = \sin \varphi \sin u.$$

Pareillement, la condition

$$\frac{d\frac{dy}{dt}}{du} = \frac{d\frac{dy}{du}}{dt}$$

donne

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \sin \varphi \cos u \frac{d\varphi}{du} = \cos \varphi \sin u.$$

Or, si l'on élimine tour à tour $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{du}$ entre ces deux équations, il vient

$$\cos u \frac{d\varphi}{du} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sin u;$$

d'où l'on tire deux conclusions contradictoires, savoir :

(*) Académie de Saint-Pétersbourg, 1777.

1° que la fonction φ est indépendante de u; 2° que la même fonction renferme la variable u. Donc les équations (1), (2) et (3) sont incompatibles, et la représentation graphique exacte d'une surface sphérique sur un plan est impossible; ce qu'il fallait démontrer.

2. Proposons-nous maintenant cette question : *Est-il possible qu'il y ait similitude entre les deux éléments correspondants* PQRS, *pqrs*?

La similitude n'entraîne que deux conditions :

$$\frac{PQ}{pq}=\frac{PR}{pr},\quad \text{angle QPR}=\frac{\pi}{2},$$

ou

$$\cos u\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{du}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{du}=0.$$

Posons, comme dans le premier cas, $\tang\varphi=\dfrac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$, et ces deux équations seront remplacées par les trois suivantes :

$$\cos u\,\frac{dy}{du}=\frac{dx}{dt},$$

$$\cos\varphi\,\frac{dy}{du}=\sin\varphi\,\frac{dx}{du},$$

$$\sin\varphi\,\frac{dy}{dt}=-\cos\varphi\,\frac{dx}{dt};$$

ici, comme nous avons trois fonctions inconnues x, y, φ et le même nombre d'équations à satisfaire, on comprend que le problème sera possible, en général. Nous nous bornerons à discuter un cas, qui ne laissera aucun doute sur cette possibilité; c'est celui où l'on ajoute à la similitude une nouvelle condition de nature à simplifier la représen-

tation graphique de la sphère, à savoir que l'élément PQ du méridien soit perpendiculaire à l'axe des x.

Alors on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et les trois équations précédentes se réduisent à

$$\frac{dx}{du} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \cos u \frac{dy}{du} = \frac{dx}{dt};$$

on conclut des deux premières que x sera indépendant de u, et y indépendant de t : par suite, la troisième équation apprend que $\frac{dx}{dt}$ sera une constante, puisque si $\frac{dx}{dt}$ était fonction de t, y dépendrait aussi de cette variable.

Soit $\frac{dx}{dt} = n$, d'où $x = nt + \text{const.}$; x croissant proportionnellement à la longitude t, *les méridiens seront représentés sur le plan par des droites perpendiculaires à* ox, *dont les distances mutuelles seront proportionnelles aux angles que ces méridiens font entre eux.* A des méridiens équidistants angulairement, correspondront des droites parallèles équidistantes.

Quant aux parallèles sphériques, puisque l'élément PR est à angle droit sur PQ, il prendra une direction constamment parallèle à l'axe des x; par conséquent, les *parallèles sphériques seront aussi représentées par des droites perpendiculaires aux premières, mais inégalement distantes.* La loi de ces distances sera fournie par l'équation

$$\cos u \frac{dy}{du} = n;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y = n \operatorname{l} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) + \text{const.}$$

Nous conviendrons que l'axe ox représente l'équateur, et que l'origine des coordonnées corresponde au point A,

pour lequel on a $t = 0$, $u = 0$. Alors nous aurons

$$x = nt,$$
$$y = n \, \mathrm{l} \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right).$$

Si l'on considère sur la sphère (*fig.* 3) un élément pv appartenant à une courbe quelconque, et que PV soit l'élément de la ligne plane correspondante, on a

$$\tang vpr = \frac{vr}{pr} = \frac{du}{\cos u \, dt},$$
$$\tang \mathrm{VPR} = \frac{\mathrm{VR}}{\mathrm{PR}} = \frac{dy}{n \, dt}.$$

Or $\frac{du}{\cos u} = \frac{dy}{n}$; donc $\tang vpr = \tang \mathrm{VPR}$. Ainsi on vérifie qu'une courbe quelconque fait, avec chaque méridien, le même angle sur la sphère et sur le plan.

La ligne à double courbure, qui sur la sphère coupe tous les méridiens sous le même angle, et qu'on nomme *loxodromie*, sera représentée sur le plan par une ligne droite. C'est cette propriété qui a fait adopter le mode de représentation graphique que nous venons d'étudier, dans les cartes marines dites de *Mercator*. En mer, le pilote ne s'attache pas à suivre la ligne la plus courte d'un point à un autre, c'est-à-dire l'arc de grand cercle qui joint ces deux points, parce que cet arc fait avec les méridiens successifs des angles différents, et qu'il serait très-compliqué de diriger à chaque instant sous ces divers angles la route du vaisseau par rapport aux méridiens. De plus, si l'on s'engageait dans cette voie, les déviations inévitables causées par les courants ne tarderaient pas à faire sortir le vaisseau de l'arc de grand cercle qui joint le point de départ au point d'arrivée, et dès lors tout le calcul des angles sous lesquels on doit rencontrer les méridiens successifs serait à recommencer. Au contraire, pour suivre la loxo-

dromie, il n'est pas besoin de calculs; on joint par une droite, sur la carte marine, le point de départ au point d'arrivée; on mesure l'angle que cette droite fait avec l'une des parallèles qui représentent les méridiens, et le pilote n'a qu'à maintenir, à l'aide de la boussole, la direction du navire sous cet angle constant.

Toutefois, on conçoit que cet angle peut lui-même devenir fautif par suite des déviations auxquelles le vaisseau est exposé, et qui peuvent nécessiter le tracé d'une nouvelle loxodromie: on a soin, dans le cours du voyage, de déterminer de temps en temps la vraie position du lieu où l'on se trouve, afin de corriger l'angle sous lequel on se dirige.

Tandis que les courbes loxodromiques sont représentées, sur le plan, par des lignes droites, les arcs de grand cercle sont représentés par des courbes transcendantes.

En effet, soit Ap un arc de grand cercle, incliné à l'équateur de l'angle $pAa = \theta$; l'équation de cet arc en coordonnées sphériques est

$$\tang u = \tang \theta \sin t.$$

(On passerait au cas d'un cercle, situé d'une manière quelconque, par un simple déplacement d'origine sur l'équateur, ce qui reviendrait à remplacer t par $t +$ const). La courbe EP, qui répond à cet arc sur le plan, sera définie par les équations

$$x = nt, \quad y = n \,\mathrm{l}\, \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right),$$

associées à la précédente.

Pour avoir l'équation de cette courbe en coordonnées rec-

(*) D'après une propriété connue des projections stéréographiques, la projection stéréographique de la loxodromie sur le plan de l'équateur sera une courbe faisant un angle constant avec ses rayons vecteurs, c'est-à-dire une spirale logarithmique.

tangles, il reste à éliminer t et u entre ces trois équations; on a

$$e^{\frac{y}{n}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{u}{2}};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \frac{e^{\frac{y}{n}} - 1}{e^{\frac{y}{n}} + 1} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} u = \frac{e^{\frac{2y}{n}} - 1}{2e^{\frac{y}{n}}}.$$

Donc l'équation cherchée est

$$\frac{e^{\frac{2y}{n}} - 1}{2e^{\frac{y}{n}}} = \operatorname{tang}\theta \sin\frac{x}{n}.$$

Cette courbe coupe l'axe des x ou l'équateur sous l'angle θ.

L'ordonnée maximum répond à $x = \frac{n\pi}{2}$; d'où

$$e^{\frac{y}{n}} = \operatorname{tang}\theta\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta} \quad \text{et} \quad y = n\,\mathrm{l}\,\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

CHAPITRE II.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LES DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

1. *Relations entre le rayon de courbure d'une courbe plane et le rayon de courbure correspondant de sa développée.*

Soient ABC (*fig.* 4) une courbe plane, A'B'C' sa développée, ρ un rayon de courbure AA' de la première, ρ' le rayon de courbure correspondant A'P de la seconde; si l'on considère un rayon infiniment voisin BB', faisant avec AA' un angle $d\varphi$, on sait que l'arc A'B' de la développée est égal à la différentielle $d\rho$, et que ρ' est la limite de $\frac{A'B'}{d\varphi}$; donc

$$(1) \qquad \rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Si l'équation de la courbe AB est donnée en coordonnées restangulaires x et y, on tirera aisément de l'équation (1) l'expression du rapport $\frac{\rho'}{\rho}$, en fonction des dérivées de y par rapport à x. En effet, on a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho\, d\varphi} = \frac{d\rho}{ds},$$

ds désignant la différentielle de l'arc de la courbe AB. Or, si l'on différentie par rapport à x l'expression

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

où l'on a

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

il vient

$$\frac{d\rho}{dx} = \pm \frac{3pq^2 - r(1 + p^2)}{q^2} \sqrt{1 + p^2}, \quad \text{en posant} \quad r = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

D'ailleurs
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + p^2},$$

donc

$$(2') \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \pm \frac{3pq^2 - r(1 + p^2)}{q^2}.$$

2. Au lieu de définir la courbe AB par une équation entre les deux variables x et y, on peut se proposer de la définir par une équation entre les deux variables ρ et ρ'.

En effet, p, q, r sont des fonctions de x déterminées par l'équation de la courbe $\varphi(x, y) = 0$; si l'on conçoit qu'on ait remplacé ces fonctions par leurs valeurs dans les équations

$$\rho = \pm \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \pm \frac{3pq^2 - r(1 + p^2)}{q^2},$$

il ne restera plus qu'à éliminer x entre ces deux équations. Ou bien, s'il n'est pas possible d'exprimer p, q, r en fonction explicite de x, on éliminera x et y entre les deux équations ci-dessus, associées à $\varphi(x, y) = 0$.

Par exemple, s'il s'agit d'une ellipse, dont l'équation est

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

on aura

$$p = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad q = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r = \frac{-3abx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{(a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}, \quad \frac{\rho'}{3\rho} = \frac{c^2 x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3 b}, \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

On tire de la première

$$x^2 = \frac{a^4 - (a^4 b\rho)^{\frac{2}{3}}}{c^2} = \frac{a^4(1 - z)}{c^2},$$

en posant

$$z = \sqrt[3]{\frac{b\rho}{a^2}}.$$

Cette valeur de x^2, substituée dans la seconde équation, donne

$$\left(\frac{\rho'}{3\rho}\right)^2 = (1 - z)\left(\frac{a^2 z}{b^2} - 1\right),$$

ou bien, en rétablissant la valeur de z,

$$\left(\frac{\rho'}{3\rho}\right)^2 = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{b\rho}{a^2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a\rho}{b^2}} - 1\right).$$

Telle est l'équation qui lie, dans l'ellipse, les deux rayons ρ, ρ'. Elle montre que la plus grande valeur de ρ est $\frac{a^2}{b}$, et la plus petite $\frac{b^2}{a}$; et, qu'à ces deux limites, le rayon de la développée, $\rho' = 0$. Le maximum de ρ a lieu au sommet du petit axe, et le minimum au sommet du grand axe.

Les calculs précédents s'appliquent à l'hyperbole, en changeant b en $b\sqrt{-1}$. Dans le cas du cercle, $a = b$, et l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\rho'}{3\rho}\right)^2 + \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho}{a}}\right)^2 = 0;$$

elle se partage en deux, $\rho = a$, $\rho' = 0$.

3. *Déterminer la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à celui de sa développée.*

Soit $\frac{\rho'}{\rho} = k$; l'équation différentielle de la courbe cherchée sera, d'après la relation (2),

$$3p - r\frac{1+p^2}{q^2} = k.$$

Cette équation ne contenant pas explicitement x, on lui appliquera la méthode du changement de variable indépendante; prenons p pour variable indépendante, il vient

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dp}q.$$

L'équation prend la forme

$$3p - k = \frac{(1+p^2)dq}{qdp},$$

ou

$$\frac{3p-k}{1+p^2}dp - \frac{dq}{q} = 0.$$

Les variables étant séparées, on intègre, et l'on a

$$\tfrac{3}{2}\,l\,(1+p^2) - k \operatorname{arc\,tang} p - l\,cq = 0,$$

c étant une constante arbitraire, et l la caractéristique des logarithmes népériens.

Si l'on remplace q par $\frac{dp}{dx}$, et qu'on résolve par rapport à dx, il vient

$$dx = \frac{ce^{k \operatorname{arc\,tang} p}\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en posant $p = \operatorname{tang}\varphi$,

$$dx = ce^{k\varphi}\cos\varphi\,d\varphi;$$

par suite,

$$dy = ce^{k\varphi}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que cette dernière expression de dx aurait pu être obtenue plus simplement, en partant de l'équation (1). Elle donne, en effet,

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho d\varphi},$$

et puisque $\frac{\rho'}{\rho} = k$,

$$\frac{d\rho}{\rho} = k d\varphi;$$

intégrant, il vient

$$\rho = ce^{k\varphi}.$$

Or, φ étant l'angle de la tangente avec l'axe des x, on a

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad ds = \rho d\varphi;$$

donc

$$\cos\varphi = \frac{dx}{\rho d\varphi},$$

par suite

$$dx = \rho \cos\varphi d\varphi = ce^{k\varphi} \cos\varphi d\varphi,$$

comme ci-dessus.

Intégrons maintenant les expressions de dx et dy; il viendra

$$x - \alpha = \frac{c}{k^2 + 1} e^{k\varphi} (\sin\varphi + k\cos\varphi),$$

$$y - \beta = \frac{c}{k^2 + 1} e^{k\varphi} (k\sin\varphi - \cos\varphi).$$

α et β sont deux constantes arbitraires, qu'on peut toujours faire disparaître en transportant les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes, aux points $x = \alpha$, $y = \beta$; ce qui d'ailleurs ne change pas l'angle φ. C'est pourquoi nous omettrons ces deux constantes dans les calculs qui vont suivre.

L'élimination de φ, entre les deux équations précédentes, fournirait l'équation de la courbe cherchée; mais il vaut

mieux employer les coordonnées polaires. On tire, par division,

$$\frac{y}{x}=\frac{k\,\mathrm{tang}\,\varphi-1}{k+\mathrm{tang}\,\varphi}=\frac{\mathrm{tang}\,\varphi-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}\,\mathrm{tang}\,\varphi},$$

ou, en désignant par θ l'angle mox (*fig.* 4), dont la tangente est $\frac{y}{x}$, par ω l'angle dont la tangente est $\frac{1}{k}$,

$$\mathrm{tang}\,\theta=\mathrm{tang}\,(\varphi-\omega)\quad\text{et}\quad\varphi-\theta=\omega.$$

Mais $\varphi-\theta$ n'est autre que l'angle omT que fait la tangente avec le rayon vecteur om; cet angle est donc constant, propriété qui caractérise une *spirale logarithmique*.

Si, au lieu de diviser y par x, on avait ajouté les carrés de ces variables, on aurait eu l'expression du rayon vecteur om,

$$\mathrm{R}=\frac{c}{\sqrt{k^2+1}}e^{k\varphi},$$

et puisque $\varphi=\theta+\omega$,

$$\mathrm{R}=\frac{c}{\sqrt{k^2+1}}e^{k(\theta+\omega)};$$

c'est bien l'équation polaire d'une spirale logarithmique, dans laquelle l'angle de la tangente avec le rayon vecteur a pour tangente trigonométrique $\frac{1}{k}$. Dans l'hypothèse $k=1$, cet angle est de 45 degrés.

On aurait pu achever l'intégration, sans recourir aux coordonnées polaires, en remplaçant $\mathrm{tang}\,\varphi$ par $\frac{dy}{dx}$ dans la valeur précédente de $\frac{y}{x}$, ce qui eût donné l'équation différentielle du premier ordre

$$xdx+ydy=k(xdy-ydx);$$

en divisant les deux membres par x^2+y^2, ils deviennent intégrables, et l'on a

$$\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{A}e^{k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}} = \mathrm{A}e^{k\theta},$$

résultat conforme aux précédents.

4. Étant donnée une courbe AB, si l'on forme sa développée A'B', puis la développée A''B'' de A'B', courbe qu'on peut appeler *développée du second ordre* de la courbe primitive, puis la développée A'''B''' de A''B'', ou *développée du troisième ordre*, et ainsi de suite, on aura, en désignant par $\rho, \rho', \rho'', \rho''', \ldots$ les rayons de courbure correspondants de la courbe AB et de ses développées successives,

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \rho'' = \frac{d\rho'}{d\varphi} = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}, \quad \rho''' = \frac{d^3\rho}{d\varphi^3}, \ldots, \quad \rho^{(n)} = \frac{d^n\rho}{d\varphi^n}.$$

Le problème que nous venons de traiter n'est qu'un cas particulier de celui où l'on proposerait de déterminer une courbe telle, que son rayon de courbure eût un rapport constant avec celui de la développée du $n^{\text{ième}}$ ordre.

On aurait à intégrer une équation linéaire de l'ordre n,

$$\frac{d^n\rho}{d\varphi^n} = k\rho.$$

L'intégrale est

$$\rho = \sum_1^n c_i e^{k_i\varphi},$$

k_i désignant l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de k, et c_i une constante arbitraire. L'indice i prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

On en conclut, comme précédemment, deux équations finies entre x, y et φ, savoir :

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha &= \sum_1^n \mathrm{A}_i e^{k_i\varphi}(\sin\varphi + k_i\cos\varphi) \\ y-\beta &= \sum_1^n \mathrm{A}_i e^{k_i\varphi}(k_i\sin\varphi - \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \left(\mathrm{A}_i = \frac{c_i}{k_i^2+1}\right).$$

L'élimination de φ entre ces deux équations n'est plus possible en général. On peut remplacer leur système par le suivant :

$$(x-\alpha)\sin\varphi-(y-\beta)\cos\varphi=\sum_1^n \mathrm{A}_i e^{k_i\varphi},$$

$$(x-\alpha)\cos\varphi+(y-\beta)\sin\varphi=\sum_1^n \mathrm{A}_i k_i e^{k_i\varphi}.$$

La seconde équation étant la dérivée de la première par rapport à φ, la courbe cherchée est l'enveloppe des droites que représente la première équation quand on y fait varier φ ; et ces droites sont tangentes à la courbe.

5. *Déterminer la courbe dont le rayon de courbure en chaque point est une fonction donnée du rayon vecteur mené d'un point fixe à ce même point.*

Soient $om=r$ (*fig.* 5) le rayon vecteur, $cm=\rho$ le rayon de courbure correspondant,

$$m\mathrm{T}x=\varphi,\quad mo\mathrm{T}=\theta,\quad om\mathrm{T}=\mathrm{V}.$$

On a

$$\rho=\frac{ds}{d\varphi}=\frac{ds}{d\theta+d\mathrm{V}},\quad \cos\mathrm{V}=\frac{dr}{ds},\quad \sin\mathrm{V}=\frac{rd\theta}{ds}.$$

A l'aide des deux dernières relations, on peut éliminer de l'expression de ρ, ds et $d\theta$, et il vient.

$$(1)\qquad \rho=\frac{rdr}{d(r\sin\mathrm{V})}.$$

Cette formule, qui convient à toute courbe plane, est propre à résoudre tous les problèmes dans lesquels le rayon de courbure ρ sera donné en fonction du rayon vecteur r, ou du produit $r\sin\mathrm{V}$ (projection du rayon vecteur sur la normale) ; car elle permettra d'exprimer V en fonction de r par une quadrature, et comme on a d'ailleurs $\tang\mathrm{V}=\frac{rd\theta}{dr}$,

on en conclura r en fonction de θ par une nouvelle intégration.

Ainsi, soit en général $\rho = f(r)$. L'équation (1) donnera

$$d(r \sin V) = \frac{rdr}{f(r)}:$$

d'où

$$r \sin V = c + \int \frac{rdr}{f(r)},$$

c étant une constante arbitraire.

Puis

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{\frac{1}{r}\left(c + \int \frac{rdr}{f(r)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}\left(c + \int \frac{rdr}{f(r)}\right)^2}}$$

et

$$\theta - \omega = \int \frac{\frac{dr}{r^2}\left(c + \int \frac{rdr}{f(r)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}\left(c + \int \frac{rdr}{f(r)}\right)^2}}.$$

Ainsi, le problème se ramène toujours aux quadratures.

Examinons le *cas où le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.*

On a, en désignant par n une constante donnée,

$$\rho = \frac{r}{n}.$$

L'équation (1) devient

$$d(r \sin V) = n\, dr;$$

d'où

$$(2) \qquad r \sin V = nr + c.$$

Si l'on a $n > 1$, la constante arbitraire c devra être négative, afin que la valeur de $\sin V$ soit plus petite que 1.

Si l'on a $n < 1$, c pourra être positive ou négative; et si l'on supposait de plus, $c = 0$, on aurait $\sin V = n$; l'angle V

serait constant. La courbe cherchée serait donc une *spirale logarithmique*. En effet, dans cette spirale, dont l'équation est $r = Ae^{m\theta}$, on sait que $\rho = r\sqrt{1+m^2}$.

Si $n = 1$, la constante c devra être négative ou nulle. Soit $c = 0$, on en conclut $V = \frac{\pi}{2}$: c'est le *cas du cercle*, puisqu'alors $\frac{dr}{d\theta} = 0$; d'où $r = \text{const.}$ Le cercle n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la spirale logarithmique.

Laissons ces cas particuliers, et revenons à l'équation (2); on en tire

$$\operatorname{tang} V = \frac{nr + c}{\sqrt{r^2 - (nr + c)^2}} = \frac{rd\theta}{dr}:$$

d'où

$$\theta - \omega = \int \frac{(nr+c)\,dr}{r\sqrt{r^2 - (nr+c)^2}} = n\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - (nr+c)^2}} + \int \frac{\frac{cdr}{r^2}}{\sqrt{1 - \left(n + \frac{c}{r}\right)^2}}$$

$$= \arccos\left(n + \frac{c}{r}\right) + n\int \frac{dr}{\sqrt{r^2(1-n^2) - 2ncr - c^2}}.$$

La seconde intégrale prendra des formes différentes, selon que n sera > 1 ou < 1.

Soit $n < 1$, on aura

$$\theta - \omega = \arccos\left(n + \frac{c}{r}\right)$$
$$+ \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\, \mathrm{l}\left[r\sqrt{1-n^2} - \frac{nc}{\sqrt{1-n^2}} + \sqrt{r^2 - (nr+c)^2}\right].$$

Si l'on suppose $c = 0$, on retrouve $r = Ae^{m\theta}$, spirale logarithmique.

Dans le cas où $n = 1$, la constante c restant quelconque, la formule précédente n'est pas applicable. L'intégration

directe de l'expression de $d\theta$ donne, en changeant c en $-c$,

$$\theta - \omega = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{2r - c} - \text{arc cos}\sqrt{\frac{c}{2r}},$$

ou bien

$$\left(\theta + \text{arc cos}\sqrt{\frac{c}{2r}}\right)\sqrt{c} - \sqrt{2r - c} + \Omega = 0.$$

La constante Ω remplace ω. L'hypothèse $c = 0$ donne $r =$ const., comme on l'a déjà vu.

D'après ce qui précède, on voit que la propriété d'avoir le rayon de courbure proportionnel au rayon vecteur issu d'un point fixe, n'est pas caractéristique de la spirale logarithmique, mais qu'elle appartient à une classe de courbes transcendantes assez étendue.

Nous avons indiqué plus haut que la formule (1) convient aussi aux problèmes dans lesquels on demande une *courbe dont le rayon de courbure est une fonction donnée de la projection* ($r \sin V$) *du rayon vecteur sur la normale*.

En effet, soit

$$\rho = f(r \sin V),$$

et posons

$$r \sin V = z;$$

l'équation (1) donne

$$rdr = f(z)\,dz,$$

dont l'intégrale est

$$r^2 + c = \int f(z)\,dz = F(z),$$

et remplaçant z par sa valeur en r et θ,

$$r^2 + c = F\left(\frac{r^2}{\sqrt{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}}\right).$$

Si l'on peut la résoudre, soit par rapport à $\frac{dr}{d\theta}$, soit par rapport à r, l'intégration s'achèvera par des quadratures.

Par exemple, soit

$$\rho = nr \sin V;$$

on aura

$$r^2 - a^2 = nr^2 \sin^2 V,$$

a étant une constante arbitraire, d'où

$$\theta - \omega = \int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}\, dr}{r\sqrt{(n-1)r^2 + a^2}}.$$

Si l'on suppose $a = 0$, cette intégrale se réduit à

$$r = A e^{\sqrt{n-1}\,.\,\theta};$$

on retrouve la *spirale logarithmique*, résultat conforme aux propriétés bien connues de cette courbe; et pour $n = 1$, la spirale dégénère en un *cercle*.

Autres solutions. — Comme exercices d'analyse, nous indiquerons l'usage qu'on aurait pu faire, dans les problèmes précédents, des formules ordinaires du rayon de courbure en coordonnées polaires et en coordonnées rectilignes.

1°.
$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

En l'égalant à $\frac{r}{n}$, on a

$$n\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)r.$$

Cette équation ne contenant pas θ explicitement, on l'abaisse au premier ordre, en posant

$$\frac{dr}{d\theta} = p: \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{pdp}{dr},$$

et l'équation devient.

$$n(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}} = r\left(r^2+2p^2-r\frac{pdp}{dr}\right).$$

On la simplifie en posant

$$p = ru,$$

d'où

$$\frac{dp}{dr} = u + r\frac{du}{dr};$$

il vient

$$(3) \qquad n(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + u^2 - \frac{ru\,du}{dr}.$$

Comme $u\,du = \frac{1}{2}d(1+u^2)$, on est conduit à prendre pour inconnue la fonction $1+u^2$.

Soit

$$1 + u^2 = t^2,$$

il vient

$$t(1-nt) = r\frac{dt}{dr}.$$

Les variables se séparent, et l'on a

$$\frac{dr}{r} = \frac{dt}{t(1-nt)},$$

dont l'intégrale est

$$r = \frac{ct}{1-nt};$$

elle coïncide avec l'équation (2) obtenue dans le précédent calcul, car la variable t n'est autre que $\frac{1}{\sin V}$, etc.

2°. L'expression de ρ aurait pu encore s'écrire :

$$\rho = \frac{r\left[1+\left(\frac{dr}{rd\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+\left(\frac{dr}{rd\theta}\right)^2 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{rd\theta}\right)},$$

et cette forme conduirait à prendre pour inconnue

$$\frac{dr}{rd\theta} = u.$$

L'équation du problème serait ainsi

$$n(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + u^2 - \frac{du}{d\theta};$$

Elle ne diffère pas de l'équation (3), car

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{ru\,du}{dr}, \text{ etc.}$$

3°. Si l'on part de l'expression de ρ en coordonnées rectilignes,

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}},$$

l'équation du problème est

$$(4) \qquad \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

En multipliant les deux membres par le facteur

$$x + py \quad \text{ou} \quad \frac{xdx + ydy}{dx},$$

le second membre devient

$$\frac{n(xdx + ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

différentielle exacte, et le premier membre devient

$$\frac{(x+py)\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dont on n'aperçoit pas immédiatement l'intégrale; cepen-

dant l'intégration par parties donne

$$\int \frac{x\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{px}{\sqrt{1+p^2}} - \int \frac{dy}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\int \frac{py\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y}{\sqrt{1+p^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1+p^2}},$$

et, en ajoutant,

$$\int \frac{(x+py)\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}}.$$

L'équation (4) s'intègre donc une première fois par cette méthode, et donne

$$-n\sqrt{x^2+y^2} + \frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}} = C.$$

Or

$$\frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{r^2\,d\theta}{ds} = r\sin V.$$

L'intégrale précédente équivaut donc à

$$r\sin V = nr + c;$$

c'est l'équation (2) de la première solution, etc.

6. *Déterminer une courbe dont le rayon de courbure, en chaque point, est égal à une longueur donnée multipliée par le sinus de l'angle φ que fait la tangente en ce point avec une droite fixe.*

On a l'équation

$$\rho = a\sin\varphi.$$

En partant de la relation $\rho = \dfrac{ds}{d\varphi}$, et choisissant la droite fixe pour axe des x, on trouve, par une intégration bien simple,

$$s^2 = 2ax;$$

d'où l'on conclut que la courbe est une cycloïde dont le

cercle générateur a pour rayon $\frac{a}{4}$. On peut aussi chercher directement l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, etc.

7. *Déterminer une courbe plane telle, que l'arc compris entre deux de ses points, soit égal à l'arc de cercle décrit du point d'intersection des normales menées par ces points, comme centre, avec un rayon égal à la moyenne arithmétique entre ces normales* (*).

Soient (*fig.* 6)

$$AO = p, \quad mO = q;$$

deux normales à la courbe cherchée, φ l'angle AOm, s l'arc Am; on doit avoir

$$s = \tfrac{1}{2}(p+q)\varphi.$$

Soit m' un point infiniment voisin de m; $m'O'$ la normale correspondante. Menons OH perpendiculaire et $O\mu$ parallèle à cette normale; nous aurons

$$ds = m\mu + \mu m'.$$

Or

$$m\mu = qd\varphi, \quad \mu m' = OH = OO' \sin\varphi = dp.\sin\varphi.$$

Donc

$$ds = qd\varphi + dp.\sin\varphi.$$

On a aussi

$$O'H = dq = dp.\cos\varphi.$$

Ainsi, entre les quatre variables s, p, q, φ, on a les trois équations

$$\frac{2s}{\varphi} = p + q,$$

$$dq = dp.\cos\varphi,$$

$$ds = qd\varphi + \sin\varphi.dp.$$

(*) *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, 1749. Mémoire d'Euler.

Si l'on élimine p et q, il restera une équation différentielle entre s et φ. Pour l'obtenir plus commodément, posons

$$\frac{s}{\varphi} = u;$$

d'où

$$ds = \varphi\, du + u\, d\varphi.$$

Les équations précédentes deviennent

$$2u = p + q,$$
$$dq = \cos\varphi . dp,$$
$$\varphi\, du = (q - u)\, d\varphi + \sin\varphi . dp.$$

La première donne

$$q = 2u - p, \quad dq = 2\,du - dp,$$

et, substituant dans les deux autres, il vient

$$2\,du = (1 + \cos\varphi)\, dp,$$
$$\varphi\, du = (u - p)\, d\varphi + \sin\varphi . dp,$$

entre lesquelles il reste à éliminer p.

Substituant dans la seconde la valeur de dp, tirée de la première, on a

$$p = u + \left(\frac{2\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} - \varphi\right)\frac{du}{d\varphi}.$$

Différentiant et remplaçant $\frac{dp}{d\varphi}$ par sa valeur $\frac{2\frac{du}{d\varphi}}{1 + \cos\varphi}$, il vient, toutes réductions faites,

$$\left(\frac{2\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} - \varphi\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0.$$

Le premier facteur égalé à zéro donnerait

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi,$$

ce qui exigerait que φ fût constamment nul; alors la ligne AB serait droite, et l'arc Am pourrait être regardé comme appartenant à un cercle de rayon infini. Écartons cette so-

lution, qui sera d'ailleurs comprise dans la solution générale. Le second facteur, égalé à zéro, donne

$$d^2\left(\frac{s}{\varphi}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{a\varphi^2}{2} + b\varphi;$$

a et b sont deux constantes arbitraires.

On conclut de là le rayon de courbure de la courbe cherchée

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = a\varphi + b,$$

et le rayon de courbure de la développée

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = a;$$

ρ' étant constant, la développée est un cercle. Donc *la courbe cherchée est une développante de cercle.* Le rayon de ce cercle est égal à a, et comme on a pour $\varphi = 0$, $\rho = b$, la constante b représente le rayon de courbure AC du point A. Si l'on supposait $a = 0$, la développée se réduirait à un point, et la développante deviendrait elle-même un cercle.

En effet, le cercle satisfait évidemment à l'énoncé du problème.

La tangente en m fait avec l'axe des x un angle complémentaire de φ; on a donc

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi,$$

et, remplaçant ds par sa valeur $(a\varphi + b)\,d\varphi$,

$$dx = (a\varphi + b)\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = (a\varphi + b)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Intégrant, et déterminant les constantes par la condition que pour $\varphi = 0$ on ait

$$x = 0, \quad y = 0,$$

il vient

$$x - b = a\sin\varphi - (q\varphi + b)\cos\varphi,$$
$$y + a = a\cos\varphi + (a\varphi + b)\sin\varphi.$$

Pour éliminer φ, on remplace le système de ces équations par le suivant :

$$(x-b)^2+(y+a)^2-a^2=(a\varphi+b)^2,$$
$$(x-b)\sin\varphi+(y+a)\cos\varphi=a.$$

Ces deux équations expriment deux propriétés caractéristiques d'une développante de cercle de rayon a, et l'on aurait pu les écrire immédiatement : la première signifie, en effet, que la longueur de la normale $c'm$ est égale à l'arc $CC'(a\varphi)$ augmenté du rayon de courbure $AC=b$; et la seconde apprend que la projection du contour polygonal $mP+PI$, sur le rayon IC', est égale à ce rayon.

L'élimination de φ se fait sans difficulté, et l'on a

$$(x-b)\sin\left[\frac{-b+\sqrt{(x-b)^2+(y+a)^2-a^2}}{a}\right]$$
$$+(y+a)\cos\left[\frac{-b+\sqrt{(x-b)^2+(y+a)^2-a^2}}{a}\right]=a.$$

Telle est, en coordonnées rectangles, l'équation de la courbe demandée.

On a

$$Im=\sqrt{(x-b)^2+(y+a)^2};$$

soit $Im=R$, on en tire

$$RdR=(x-b)dx+(y+a)dy=(a\varphi+b)ad\varphi.$$

Or

$$ds=(a\varphi+b)d\varphi;$$

donc

$$RdR=ads, \quad \text{d'où} \quad 2as=R^2-R_0^2,$$

en désignant par R_0 le rayon vecteur IA. Ainsi on a la proportion

$$2a:R-R_0::R+R_0:s;$$

c'est-à-dire que l'arc Am est une quatrième proportionnelle au diamètre de la développée circulaire, à la diffé-

rence des rayons vecteurs menés du centre du cercle aux extrémités de l'arc et à la somme de ces mêmes rayons.

Remarque. — Le problème que nous venons de résoudre a mis en évidence une propriété remarquable, qui n'appartient qu'à une développante de cercle, c'est que la longueur d'un arc de cette courbe est égale à l'arc de cercle qu'on décrirait du point d'intersection des deux normales extrêmes avec un rayon égal à la demi-somme de ces normales.

Il est facile de démontrer directement ce théorème.

Soient

$$AC = b, \quad mC' = \rho, \quad \text{arc}\, Am = s, \quad CI = a;$$

on a

$$\rho = AC + \text{arc}\, CC' = b + a\varphi,$$
$$ds = \rho\, d\varphi = (b + a\varphi)\, d\varphi,$$

d'où

$$s = \frac{a\varphi^2}{2} + b\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi(a\varphi + b + b) = \tfrac{1}{2}\varphi(AC + mC').$$

Or

$$AC = AO - CO, \quad mC' = mO + C'O \quad \text{et} \quad CO = C'O;$$

donc

$$s = \tfrac{1}{2}\varphi(AO + mO).$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE TRACÉE SUR UNE SURFACE CONIQUE. — DE LA COURBE QUI COUPE TOUTES LES ARÊTES DE LA SURFACE SOUS UN ANGLE CONSTANT.

1. Théorème. — *Si l'on trace sur une surface conique quelconque une ligne géodésique* (ou ligne la plus courte entre deux de ses points), *chacune de ses développantes sera située sur la surface d'une sphère, ayant pour centre le sommet du cône; chacune de ses tangentes fera un angle constant avec le rayon de la sphère aboutissant au point d'incidence, et les plans tangents de la surface conique et de la sphère, en deux points correspondants, seront perpendiculaires entre eux.*

L'équation aux différences partielles d'une surface conique, dont le sommet est à l'origine o des coordonnées, est

$$(1) \qquad z = px + qy,$$

en posant

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}.$$

Considérons sur cette surface une ligne géodésique AmB (*fig.* 7). En désignant par s l'arc Bm, compté à partir d'un certain point B, et terminé au point $m(x, y, z)$, les équations différentielles de cette ligne sont, comme on sait,

$$p = -\frac{d\frac{dx}{ds}}{d\frac{dz}{ds}}, \quad q = -\frac{d\frac{dy}{ds}}{d\frac{dz}{ds}}.$$

Si l'on substitue, dans l'équation (1), ces valeurs de p et de q, on a

$$(2)\qquad x d\frac{dx}{ds}+y d\frac{dy}{ds}+z d\frac{dz}{ds}=0.$$

Cette équation, qui a lieu pour toute ligne géodésique appartenant à toute surface conique dont le sommet est en o, va nous fournir la propriété dont il s'agit.

Soit $m'(x', y', z')$ un point de la développante, en sorte que $mm' = s + \alpha$, α étant une constante; comme mm' est tangente à la courbe AB, on aura

$$\frac{x-x'}{\frac{dx}{ds}}=\frac{y-y'}{\frac{dy}{ds}}=\frac{z-z'}{\frac{dz}{ds}}=s+\alpha,$$

d'où

$$x'=x-(s+\alpha)\frac{dx}{ds},\quad y'=y-(s+\alpha)\frac{dy}{ds},\quad z'=z-(s+\alpha)\frac{dz}{ds},$$

$$dx'=-(s+\alpha)d\frac{dx}{ds},\ dy'=-(s+\alpha)d\frac{dy}{ds},\ dz'=-(s+\alpha)d\frac{dz}{ds},$$

et, par suite,

$$x'dx'+y'dy'+z'dz'=-(s+\alpha)\left(xd\frac{dx}{ds}+yd\frac{dy}{ds}+zd\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+(s+\alpha)^2\left(\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}\right).$$

Or, en vertu de l'équation (2) et de la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

le second membre de l'équation précédente est nul; donc

$$x'dx'+y'dy'+z'dz'=0,$$

et intégrant,

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2,$$

équation d'une sphère, dont le point o est le centre. La développante A'B' est donc située tout entière sur cette

sphère, ce qu'il fallait démontrer. Pour déterminer la constante a, il suffira que l'on donne la distance à l'origine, du point décrivant m', dans l'une de ses positions.

Soit φ l'angle $mm'o$; on a

$$\cos\varphi = \frac{1}{a}\left(x'\frac{dx}{ds} + y'\frac{dy}{ds} + z'\frac{dz}{ds}\right) = \frac{1}{a}\left[x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} - (s+\alpha)\right].$$

Or, en intégrant par parties l'équation (2), on a

$$(3) \qquad x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} - s = \text{const} = c;$$

donc $\cos\varphi = \text{const}$, ce qui est la seconde partie du théorème.

La distance de l'origine o à la tangente mm' est aussi constante, puisqu'elle est égale à $a\sin\varphi$; donc la tangente mm' reste constamment tangente à une seconde sphère concentrique à la première.

On a aussi

$$x'd\frac{dx}{ds} + y'd\frac{dy}{ds} + z'd\frac{dz}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{x'}{a}\,\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{y'}{a}\,\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{z'}{a}\,\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds} = 0,$$

ou $\cos\psi = 0$, ψ désignant l'angle que le rayon de courbure ρ de la ligne géodésique au point m, fait avec le rayon correspondant (om'). Ainsi, *le rayon de courbure de la ligne géodésique (lequel est perpendiculaire au plan tangent de la surface conique), est perpendiculaire au rayon correspondant om de la sphère qui contient la développante;* ou, ce qui revient au même, *les plans tangents de la surface conique et de la sphère en deux points correspondants sont perpendiculaires entre eux;* ce qui est la troisième partie du théorème.

Remarque. — L'équation (3) manifeste d'autres pro-

priétés de la ligne géodésique. En désignant par R le rayon vecteur $om = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, cette équation peut s'écrire

$$(4) \qquad R\,dR - s\,ds = c\,ds,$$

et intégrant,

$$R^2 - R_0^2 = s^2 + 2cs;$$

R_0 désigne le rayon vecteur oB correspondant à $s = 0$, et la constante c est égale à la projection de ce rayon sur la tangente en B. Il suit de là que la longueur de l'arc Bm sera constructible par la règle et le compas, quand on connaîtra les rayons vecteurs des deux extrémités de l'arc. *La courbe est donc rectifiable.*

Considérons deux éléments consécutifs mm', $m'm''$ de la ligne géodésique; on a (*fig.* 8)

$$\cos Cmm' = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

et, en vertu de l'équation (4),

$$R \cos Cmm' = s + c:$$

au point m', on aura de même

$$R' \cos C'm'm'' = s' + c,$$

et, par suite, comme $s' - s = ds = mm'$,

$$R' \cos C'm'm'' - R \cos Cmm' = mm'.$$

Or, si l'on projette le rayon R sur la tangente mm', et que mP soit cette projection, on aura

$$mm' = mP - Pm' = -R \cos Cmm' + R' \cos C'm'P;$$

par suite, l'équation précédente se réduit à

$$\cos C'm'm'' = \cos C'm'P.$$

Les deux angles $C'm'm''$, $C'm'P$ sont donc égaux : c'est-à-dire que *deux tangentes consécutives de la ligne géodé-*

sique sont également inclinées sur l'arête intermédiaire du cône.

Cette propriété résulte d'ailleurs immédiatement de cette considération, que la ligne la plus courte sur une surface conique doit avoir une transformée rectiligne dans le développement de la surface. Sur un cylindre, la ligne géodésique, ou l'hélice, a la forme d'une spirale qui coupe toutes les arêtes sous un angle constant. On voit que dans le cône il n'en est plus ainsi. L'angle $m'mO$, que l'élément mm' fait avec l'arête correspondante, et que nous supposons aigu, est plus petit que l'angle $m''m'O$ correspondant à l'élément suivant, puisque ce dernier égale $Pm'O$; il y aura donc, dans l'étendue de l'arc BmA, un élément qui fera un angle droit avec l'arête, et sa distance au sommet du cône sera *minimum*; de part et d'autre, la courbe s'éloignera du sommet jusqu'à l'infini.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons particularisé en rien la surface conique. Si on la suppose de révolution autour de l'axe des z, il sera facile, en partant de l'équation

$$x^2+y^2-k^2z^2=0$$

(où la constante k désigne la tangente de l'angle que l'arête fait avec l'axe), d'obtenir l'équation de la projection de la ligne géodésique sur le plan des xy. En effet, en divisant l'une par l'autre les valeurs des dérivées partielles p, q, on a une équation immédiatement intégrable

$$yd\,\frac{dx}{ds}-xd\,\frac{dy}{ds}=0,$$

d'où

$$xdy-ydx=cds \quad \text{ou} \quad r^2\,d\theta=cds,$$

θ désignant l'angle de la projection r du rayon vecteur om avec l'axe des x. Cette équation exprime que l'*aire décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan des xy croît*

proportionnellement à l'arc décrit sur la ligne géodésique.

Si l'on remplace dans l'équation précédente ds par sa valeur

$$\sqrt{dr^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)+r^2d\theta^2},$$

il vient

$$\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,d\theta=\frac{cdr}{r\sqrt{r^2-c^2}},$$

dont l'intégrale est

$$r=\frac{c}{\cos m(\theta-\omega)},$$

en posant $\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}=m.$

On déterminera les constantes c et ω, en assujettissant la courbe à passer par deux points donnés sur la surface conique. Supposons, pour simplifier, que les deux points soient situés sur un même parallèle de rayon b; faisons passer le plan des zx par l'un d'eux, et soit θ_1 la valeur de θ qui correspond à l'autre; on aura les deux relations

$$b=\frac{c}{\cos m\omega},\quad b=\frac{c}{\cos m(\theta_1-\omega)},$$

d'où

$$\omega=\frac{\theta_1}{2},\quad c=b\cos m\frac{\theta_1}{2}.$$

Pour $\theta=\dfrac{\theta_1}{2}$, la valeur de r atteint son minimum $b\cos m\dfrac{\theta_1}{2}$; en ce point, la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur. Le point correspondant de la ligne géodésique est le plus rapproché du sommet du cône, puisque le minimum de R a lieu en même temps que celui de r, et la tangente fait pareillement un angle droit avec l'arête du cône. Ce point, qui est à égale distance des deux points donnés, est un sommet de la ligne géodésique.

Pour $\theta = \frac{\theta_1}{2} \pm \frac{\pi}{2m}$, on a $r = \infty$, ce qui détermine sur le cône deux arêtes asymptotes de la ligne géodésique, symétriquement placées par rapport à l'arête minima.

2. *Déterminer sur la surface d'un cône la courbe qui coupe les arêtes sous un angle constant, et qui passe par deux points de cette surface. — Longueur d'un arc de cette courbe ; mesure de la portion de surface conique, comprise entre cet arc et les arêtes qui passent par ses extrémités. — Transformée de la courbe dans le développement de la surface conique sur un plan.*

Soit AmB (*fig.* 9) une courbe dont la tangente mT fait un angle constant α avec l'arête om d'une surface conique ; nous ne supposerons pas d'abord que cette surface soit de révolution. L'énoncé fournit immédiatement une équation différentielle de la courbe

$$(1) \quad \cos\alpha = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{R\,ds}, \quad \text{où} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cette équation prend aussi la forme

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{dR}{ds},$$

d'où

$$R = s\cos\alpha + \text{const.}$$

On conclut de là que *la courbe cherchée est rectifiable*, et que *l'arc croît proportionnellement au rayon vecteur*. Si la courbe doit passer par un point A, dont le rayon $oA = R_0$, et que l'on prenne ce point pour origine des arcs, on aura pour la longueur de l'arc Am

$$s = \frac{R - R_0}{\cos\alpha}.$$

Pour calculer la portion de surface conique $AmBo$, on la décompose en éléments triangulaires infiniment petits

mom', dont chacun a pour mesure la moitié du produit de sa base ds par sa hauteur oI, qui est $R\sin\alpha$. Ainsi

$$\text{aire } AmBo = \int_{R_0}^{R_1} \frac{R\,ds\sin\alpha}{2} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{R\,dR.\tan\alpha}{2} = \frac{R_1^2 - R_0^2}{4}\tan\alpha.$$

La transformée de la courbe dans le développement du cône sur un plan est une *spirale logarithmique*, puisque l'angle α demeure le même, et qu'ainsi la transformée est une courbe qui coupe tous ses rayons vecteurs sous un angle constant. L'équation de cette spirale se déduit immédiatement de l'équation (2). En effet, quand on développe la surface conique, R et s ne changent pas de longueurs : donc, sur le plan du développement, on a encore

$$dR = \cos\alpha\, ds;$$

mais

$$ds = \sqrt{dR^2 + R^2 d\omega^2},$$

on en conclut

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\omega}{\tan\alpha} \quad \text{et} \quad R = Ae^{\frac{\omega}{\tan\alpha}}.$$

La courbe primitive, tracée sur le cône, présentera donc la forme d'une spirale qui s'approche de plus en plus du sommet, lequel est un point asymptotique de la courbe.

Bien que cette courbe fasse une infinité de circonvolutions sur la surface conique sans jamais arriver au sommet, la longueur de l'arc compris depuis le point donné A jusqu'à ce point asymptote, est finie et égale à $\frac{R_0}{\cos\alpha}$.

Le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donne $R = \text{const}$. La transformée est alors un cercle, et la courbe primitive, sur le cône, est une *courbe sphérique*, c'est-à-dire celle qui résulterait de l'intersection de la surface conique avec une sphère ayant le sommet pour centre.

Considérons en particulier un cône de révolution autour de l'axe des z. Pour achever de déterminer la courbe, on est naturellement conduit à chercher sa projection sur le plan des xy, perpendiculaire à l'axe du cône; et comme il s'agit d'une spirale, on aura recours aux coordonnées polaires. Soit P la projection du point m,

$$oP = R, \quad Pox = \theta, \quad Pmo = \beta,$$

β est un angle constant.

On a

$$R = \frac{r}{\sin\beta}, \quad dR = \frac{dr}{\sin\beta},$$

$$z = r\cot\beta, \quad dz = dr\cot\beta$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2\cot^2\beta}.$$

Par suite, l'équation (2) donne

$$dr^2 = \sin^2\beta\cos^2\alpha\,(dr^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2\cot^2\beta),$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = \sin\beta\cot\alpha\, d\theta.$$

$$r = A\,e^{\frac{\sin\beta}{\tang\alpha}\theta},$$

équation d'une *spirale logarithmique* qui coupe ses rayons vecteurs sous un angle dont la tangente est $\frac{\tang\alpha}{\sin\beta}$.

On pouvait obtenir ces resultats, sans calcul intégral, en considérant l'angle trièdre dont le sommet est en m, et qui a pour arêtes la tangente mT, la génératrice om, et la parallèle mP à l'axe. Cet angle trièdre a trois éléments constants, savoir : le dièdre droit, dont l'arête est om, et les faces adjacentes T$mo = \alpha$, P$mo = \beta$; il est donc complément déterminé dans ses autres éléments. Donc, le dièdre suivant mP, ou bien sa mesure oPT, est un angle constant. Le lieu des points P est donc une spirale logarithmi-

que; de plus, oT, intersection de deux plans perpendiculaires au plan Pmo, est perpendiculaire à ce plan; donc l'angle PoT est droit, et l'on a

$$\text{tang}\, oPT = \frac{oT}{oP} = \frac{R\,\text{tang}\,\alpha}{R\sin\beta} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\sin\beta}.$$

C. Q. F. D.

La troisième face PmT de l'angle trièdre est aussi constante. En sorte que *la courbe qui coupe toutes les génératrices d'un cône droit sous un angle constant est telle, que ses tangentes font aussi un angle constant avec l'axe du cône*. Ceci n'a lieu que dans le cône *droit*; car si l'on a à la fois

$$\frac{dz}{ds} = \text{const}, \quad \frac{dR}{ds} = \text{const},$$

il en résulte

$$\frac{dR}{dz} = \text{const}, \quad \text{ou} \quad R = kz, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = (k^2 - 1)z^2,$$

équation d'un cône droit.

On peut se proposer de déterminer le plan osculateur de la courbe AmB, son rayon de courbure, le lieu des centres de courbure, etc. Tous ces calculs sont simples et n'offrent pas de difficultés.

3. Nous terminerons cette étude en signalant une propriété remarquable de la courbe dont il s'agit.

Tandis que le point m décrit la courbe AmB, *le point* T *où la tangente rencontre le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône, trace une développante de cette courbe.*

La démonstration est fort simple. Le triangle rectangle mPT donne

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z}{mT}, \quad \text{d'où} \quad mT = z\frac{ds}{dz},$$

et différentiant

$$d.mT = ds + zd.\frac{ds}{dz}.$$

Or on a vu plus haut que $\frac{dz}{ds}$ est une quantité constante; donc on a simplement

$$d.mT = ds.$$

Ainsi, quand on passe du point m à un point infiniment voisin m', l'accroissement infiniment petit de la tangente mT est égal à l'élément mm' : donc, si l'on suppose un fil flexible et inextensible enroulé sur la courbe mm'B, et qui s'en sépare tangentiellement suivant mT, et que l'on développe ce fil en le tenant tendu, son extrémité T ne sortira pas du plan xoy, et tracera sur ce plan une développante de la courbe AmB.

Cette développante est elle-même *une spirale logarithmique;* car on a

$$oT = r \tang oPT = \frac{A \tang \alpha}{\sin \beta} e^{\frac{\sin \beta}{\tang \alpha}\theta}.$$

CHAPITRE IV.

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES.

Étant donnée une équation

$$(1) \qquad F(x, y, c) = 0,$$

dans laquelle le paramètre c peut recevoir toutes les valeurs possibles, on se propose de trouver une courbe qui coupe à angle droit toutes celles que renferme cette équation.

Supposons qu'on ait attribué à c une certaine valeur, et soient x, y les coordonnées du point où le lieu cherché coupe la courbe qui répond à cette valeur de c; le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point est $-\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$, et le coefficient angulaire de la tangente au même point du lieu est $\frac{dy}{dx}$. On devra donc avoir

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} - 1 = 0.$$

Et l'équation (1) est vérifiée par le même système de valeurs de x et y. Si donc on élimine entre les équations (1) et (2) le paramètre c, qui varie d'un point du lieu à un autre, l'équation résultante conviendra aux coordonnées d'un point quelconque du lieu; ce sera donc l'équation différentielle de la courbe cherchée. Telle est la méthode générale.

Il peut arriver qu'au lieu de l'équation finie (1), on ait

seulement l'équation différentielle des courbes données

$$(3) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Dans ce cas, il n'y a plus d'élimination à faire; il suffit, pour obtenir l'équation des trajectoires orthogonales, de remplacer dans l'équation (3), $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Quand l'équation (3) sera de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + A\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

le changement de $\frac{dy}{dx}$ en $-\frac{dx}{dy}$, ne modifiera en rien cette équation différentielle. L'intégrale générale des trajectoires orthogonales sera donc la même que l'équation finie des courbes données. Ceci s'explique en remarquant que la constante c entre alors au carré dans cette équation, laquelle représente ainsi deux courbes appartenant à l'un et à l'autre système.

Nous allons appliquer cette théorie à divers exemples.

1. *Étant donnée une suite d'ellipses* (*ou hyperboles*) *homofocales, déterminer la courbe qui les coupe à angle droit* (fig. 10).

L'équation des ellipses de mêmes foyers F, F', rapportées à leur centre O et à leurs axes de direction commune, est

$$(b^2 + c^2)y^2 + b^2x^2 = b^2(b^2 + c^2),$$

c désignant l'excentricité constante, et b le paramètre variable, qu'il s'agira d'abord d'éliminer entre cette équation et la suivante :

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{b^2x}{(b^2 + c^2)y} - 1 = 0.$$

L'équation résultante est

$$(4)\qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2-y^2-c^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Elle convient également aux trajectoires orthogonales d'une suite d'hyperboles homofocales, puisqu'en changeant b^2 en $-b^2$ dans le calcul précédent, on n'altère en rien l'équation (4).

Pour l'intégrer, on la multiplie par $\frac{y}{x^3}$, et il vient

$$\left(\frac{ydy}{xdx}\right)^2+\left(1-\frac{y^2}{x^2}-\frac{c^2}{x^2}\right)\frac{ydy}{xdx}-\frac{y^2}{x^2}=0.$$

Par cette transformation, on a introduit dans tous les termes y^2, x^2, et les différentielles ydy, xdx; on est donc conduit à poser

$$x^2=t,\quad y^2=u,$$

et l'équation prend la forme

$$(5)\qquad t\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(t-u-c^2\right)\frac{du}{dt}-u=0.$$

Elle ne renferme les variables qu'au premier degré.

Si on la différentie, comme on le fait d'ordinaire en pareil cas, on sera conduit à une équation renfermant en facteur $\frac{d^2u}{dt^2}$; d'où l'on conclut que l'on aura une intégrale particulière (au moins), en posant

$$\frac{du}{dt}=\text{const}=\alpha,\quad \text{d'où}\quad u=\alpha t+\beta.$$

D'ailleurs, sans différentier, on voit à priori que l'hypothèse $u=\alpha t+\beta$ transformera l'équation (5) en une équation du premier degré en t, et comme on a deux constantes α, β, on pourra en disposer pour annuler le terme en t et le terme indépendant. Or il arrive que le terme en t disparaît

de lui-même, et l'on a entre α et β la seule relation

$$\alpha = \frac{-\beta}{\beta + c^2}; \quad \text{donc} \quad u = \frac{-\beta t}{\beta + c^2} + \beta$$

est l'intégrale générale de l'équation (5), et, par suite, l'équation des trajectoires orthogonales est

$$(6) \qquad (\beta + c^2) y^2 + \beta x^2 = \beta(\beta + c^2).$$

Cette équation représente, pour des valeurs *négatives de* β, une suite d'*hyperboles ayant mêmes foyers que les ellipses proposées* et qui les couperont à angle droit. Ce résultat est facile à vérifier d'après les propriétés des coniques.

Pour des valeurs positives de β, l'équation représente une série d'ellipses homofocales qui ne sont autres que les ellipses proposées, et qui répondraient au problème dans lequel on supposerait donné un système d'hyperboles homofocales.

Nota. L'équation (4), divisée par xy, prend la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - c^2}{xy}\right)\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

d'où l'on voit que si l'on y changeait $\frac{dy}{dx}$ en $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, elle ne changerait pas; par conséquent, elle ne diffère pas de l'équation différentielle qu'on eût obtenue en éliminant b^2 entre l'équation des ellipses proposées et sa différentielle immédiate. La remarque qui a été faite plus haut dans la théorie était donc applicable, et pouvait dispenser des calculs d'intégration auxquels nous avons eu recours, puisque l'intégrale était connue d'avance.

2. *Étant donnée une suite de paraboles ayant même axe et même foyer, déterminer la courbe qui les coupe à angle droit.*

L'équation des paraboles données, rapportées à l'axe et

au foyer commun, est

$$y^2 = 2px + p^2.$$

L'élimination de p entre cette équation et $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{p}{y} + 1 = 0$ donne

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2x}{y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

ou bien

$$\pm \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} - dx = 0.$$

Le premier membre étant une différentielle exacte, on a pour l'intégrale cherchée

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

Elle ne diffère pas de l'équation des paraboles données. Selon qu'on attribuera à c des valeurs positives ou négatives, cette équation représentera deux séries de paraboles de même foyer, et chaque parabole du premier système coupera à angle droit toutes celles de l'autre système.

Ici encore, l'équation différentielle étant du deuxième degré en $\frac{dy}{dx}$ et ayant pour dernier terme -1, on pouvait se dispenser de chercher l'intégrale qui était connue d'avance.

3. *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une suite d'hyperboles ayant un même centre et les mêmes sommets réels.*

En partant de l'équation $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, où b est le paramètre variable, on trouvera sans difficulté l'intégrale

$$y^2 = a^2\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right].$$

A est une constante arbitraire dont la valeur absolue ne doit pas dépasser le demi-axe transverse a. Si l'on donne à A des valeurs positives, on aura une suite de courbes que l'axe des x divisera en deux parties symétriques, et dont tous les points seront situés du côté des x positifs : ces courbes correspondront aux branches d'hyperboles qui s'étendent dans le même sens. L'inverse aura lieu pour des valeurs négatives de A; et comme en changeant A en $-$A, et x en $-x$, l'équation reste la même, il suffira de construire les trajectoires qui répondent aux valeurs positives de A.

Comme cas particulier, soit $A = \frac{a}{e}$; l'équation des trajectoires orthogonales devient

$$y^2 = a^2 \left[2 + l\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right].$$

Pour $x = a$, on a

$$y = \pm a, \quad \frac{dy}{dx} = 0;$$

on a ainsi deux points de la courbe où l'ordonnée est maximum.

Si l'on pose $x = a(1 + z)$, il vient

$$y^2 = a^2[2 + 2l\,(1 + z) - (1+z)^2].$$

On voit immédiatement que, dès que la valeur absolue de z atteint ou dépasse l'unité, y est imaginaire.

Entre les limites des valeurs de z, on pourra développer $l(1 + z)$ en série convergente et calculer approximativement les valeurs de l'ordonnée dans le voisinage du sommet. Cette courbe fermée est divisée symétriquement par l'axe des x, et coupe cet axe en deux points situés de part et d'autre du sommet. En ces points, la tangente est perpendiculaire à l'axe des x.

Nous nous bornerons à énoncer les solutions des problèmes suivants :

4. *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une suite d'hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes.*

On trouve des hyperboles équilatères ayant pour axes les asymptotes des premières.

5. *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une suite de logarithmiques ayant un point commun et une même asymptote* (fig. 11).

L'équation des courbes données peut s'écrire

$$y = al\frac{x}{m},$$

a étant le paramètre variable, et m la distance du point donné à l'asymptote.

L'équation des trajectoires orthogonales est

$$y^2 - b^2 = x^2\left(\frac{1}{2} - l\frac{x}{m}\right),$$

b étant la constante arbitraire. Si on la suppose nulle, on a

$$y = \pm x\sqrt{\frac{1}{2} - l\frac{x}{m}}.$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, $\lim\frac{y}{x} = \infty$.

Pour $x = m = oA$, on a $y = \pm\frac{1}{2}m\sqrt{2} = \pm AB$, $\frac{dy}{dx} = 0$, l'ordonnée est maximum; x ne peut dépasser $m\sqrt{e}$, c'est-à-dire à peu près $\frac{8}{5}m = oc$, et pour cette limite, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$.

6. *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une suite de droites qui ont pour enveloppe une parabole donnée.*

En prenant l'équation de la parabole sous la forme

$$y^2 = 2px,$$

on est conduit à une équation différentielle où y et x n'en-

[illegible] du premier degré, et dont l'intégrale est

$$[illegible]$$

c étant une constante arbitraire.

7. *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une suite de paraboles ayant même paramètre p et même axe.*

Soit $$y^2 = 2p(x - a)$$

l'équation de ces paraboles. On trouve des courbes logarithmiques

$$y = ce^{-\frac{x}{p}}.$$

La sous-tangente est constante et égale à p.

8. *Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes renfermées dans l'équation différentielle.*

$$x(x^3 - 2y^3)\,dx - y(y^3 - 2x^3)\,dy = 0.$$

On trouve l'intégrale $y^3 - axy + x^3 = 0$ (folium de Descartes).

9. Théorème. — *Si l'on conçoit deux cycloïdes égales ayant leurs bases sur deux droites parallèles, et disposées de manière à se rencontrer, elles se couperont orthogonalement.*

CHAPITRE V.

QUESTIONS SUR LA CYCLOÏDE.

1. *Déterminer un segment de cycloïde* CmP *dont l'aire soit carrable* (fig. 12).

Soient $\text{CP} = x$, $m\text{P} = y$, $\text{P}n = z$, $\text{arc}\,\text{C}n = s$, $\text{C}o = a$; on sait que $y = z + s$. Or

$$\text{aire}\,\text{C}m\text{P} = xy - \text{C}n\text{P} = x(z + s) - [\tfrac{1}{2}as - \tfrac{1}{2}(a - x)z],$$

et réduisant,

$$\text{aire}\,\text{C}m\text{P} = \tfrac{1}{2}(x + a)z + (x - \tfrac{1}{2}a)s.$$

Pour que cette expression soit algébrique et sans quadrature, il faut et il suffit que les termes où entre l'arc s disparaissent, c'est-à-dire que $x = \frac{1}{2}a$.

Ainsi *l'abscisse extrême* (CP) *doit être moitié du rayon du cercle générateur.*

On a alors

$$\text{aire}\,\text{C}m\text{P} = \frac{3}{4}\,az = \frac{\text{triangle}\,\text{D}nr}{2}.$$

Ainsi *le segment cycloïdal carrable est équivalent à la moitié du triangle équilatéral inscrit dans le cercle générateur.*

2. *Déterminer un segment* CIm (compris entre l'arc et la corde) *dont l'aire soit carrable.*

On a

$$\text{segm.}\,\text{CI}m = \text{segm.}\,\text{CI}m\text{P} - \text{triangle}\,\text{C}n\text{P}$$
$$= \tfrac{1}{2}az + \tfrac{1}{2}(x - a)s.$$

Pour qu'il soit carrable, il faut et il suffit que $x = a$, et alors, segm. $\text{CI}m = \frac{1}{2}a^2$.

Ainsi *l'abscisse extrême doit être égale au rayon du cercle générateur, et le segment est équivalent au quart du carré inscrit dans ce cercle.*

3. *Déterminer un segment* $mPm'P'$ *dont l'aire soit carrable.*

On a $$mPm'P' = Cm'P' - CmP.$$

Soient $$CP' = x',\ \text{arc}\, Cn' = s',\quad n'P' = z';$$
il vient

$$mPm'P' = \tfrac{1}{2}[x'z' - xz + a(z' - z)] + s'(x' - \tfrac{1}{2}a) - s(x - \tfrac{1}{2}a).$$

Pour que cette expression soit carrable, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{s'}{s} = \frac{x - \frac{1}{2}a}{x' - \frac{1}{2}a}.$$

Cette équation n'est possible, s et s' étant positifs, qu'autant que *les abscisses* x *et* x' *seront toutes deux plus petites ou toutes deux plus grandes que* $\frac{1}{2}a$.

(Le contraire aurait lieu si l'on demandait que *la somme des deux segments* $Cm'P' + CmP$, ou, ce qui est la même chose, le segment $m'CQPP'$, fût *carrable*. Les points P et P' devraient alors tomber, l'un en deçà, l'autre au delà du milieu du rayon Co.)

On poura se donner, d'une infinité de manières, le rapport $\frac{s'}{s}$. Soit, par exemple, $s' = 2s$. On tirera de l'équation précédente,

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{a}{4}.$$

Il y a, de plus, entre x et x', une autre relation provenant de ce que ces abscisses sont les sinus verses des arcs s et s', dans le cercle de rayon a; on a

$$\cos\frac{s'}{a} = 2\cos^2\frac{s}{a} - 1,$$

ou

$$\frac{a-x'}{a}=\frac{2(a-x)^2}{a}-1.$$

Ces deux équations détermineront x et x'. Ce problème admet donc une infinité de solutions.

4. *Déterminer un segment* $m\mathrm{X}m'$ *dont l'aire soit carrable.*

L'aire $m\mathrm{X}m'$ s'obtiendra, en retranchant de la précédente l'aire du trapèze $m\mathrm{PP}'m'$ ou $\frac{1}{2}(x'-x)(z'+s'+z+s)$, ce qui donne

$$m\mathrm{X}m'=(\text{figures carrables})+(s'-s)\left(\frac{x+x'-a}{2}\right).$$

Comme s' ne peut être égal à s, il faut et il suffit que

$$x+x'=a \quad \text{ou} \quad \mathrm{CP}=o\mathrm{P}'.$$

Ainsi les points P, P′ devront *tomber entre le sommet* C *et le centre o, et ils seront respectivement à égale distance de ces deux points.*

De plus, on reconnaît aisément que le segment carrable $m\mathrm{X}m'$ est *équivalent à la différence des deux triangles* $\mathrm{D}n'\mathrm{P}'$ *et* $\mathrm{D}n\mathrm{P}$.

Si les points P et P′ tombent, l'un au sommet C, l'autre au centre o, on retrouve le segment $\mathrm{CI}m'$ considéré (2°), lequel est équivalent au seul triangle $\mathrm{D}n'o$ (l'autre s'évanouissant), c'est-à-dire au quart du carré inscrit dans le cercle générateur.

5. *Déterminer un segment* $m\mathrm{CQ}$, *tel que la distance de son centre de gravité au sommet* C *soit exprimable sans quadrature par une formule algébrique.*

Désignons par x_1 cette distance, par α le segment circulaire $\mathrm{C}n\mathrm{P}$; on a

$$x_1=\frac{\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}a\alpha+\frac{1}{6}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{xy-\alpha},$$

ou bien, eu égard aux relations

$$y = z + s, \quad \alpha = \tfrac{1}{2} as - \tfrac{1}{2}(a - x)z, \quad \sqrt{2ax - x^2} = z;$$

$$x_1 = \frac{(4x^2 + ax + 3a^2)z + 3(2x^2 - a^2)s}{6(x+a)z + 6(2x - a)s}.$$

Pour que cette expression devienne algébrique, il faut qu'elle soit indépendante de l'arc s : on ne saurait égaler à zéro les coefficients de s dans les deux termes; car les deux équations en x seraient contradictoires. Mais on devra établir, entre les coefficients de s, le même rapport qu'entre les parties algébriques du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire poser

(1) $$\frac{4x^2 + ax + 3a^2}{x + a} = \frac{3(2x^2 - a^2)}{2x - a},$$

auquel cas l'expression de x_1 se réduira évidemment à

$$x_1 = \frac{4x^2 + ax + 3a^2}{6(x+a)},$$

qui est indépendante de s.

(On arrive à la même condition, en exprimant que la dérivée de x_1 par rapport à s est nulle.)

L'équation (1) se réduit à

$$x(x - 2a)^2 = 0;$$

d'où $\quad x = 2a = \mathrm{CD}, \quad$ et, par suite, $\quad x_1 = \frac{7}{6}a.$

Ainsi, le *seul segment compté à partir du sommet, dont le centre de gravité puisse être déterminé par une formule algébrique, est la cycloïde entière.*

CHAPITRE VI.

THÉORÈMES SUR LES ENVELOPPES.

M. Magnus a démontré (*Annales* de Gergonne, t. XVI), par une analyse assez compliquée, plusieurs théorèmes intéressants sur les enveloppes des cordes d'une courbe plane assujetties à certaines conditions.

La Géométrie pure fournit de ces théorèmes des démonstrations fort simples, que nous présenterons comme exercices de synthèse infinitésimale.

Les trois premières propositions sont conformes à celles de M. Magnus; la quatrième manifeste une propriété nouvelle de l'enveloppe des cordes de contact d'un angle circonscrit à une courbe plane.

1. *L'enveloppe des cordes qui sous-tendent des arcs de même longueur d'une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes en un point qui est le symétrique, par rapport au milieu de la corde, du point où elle est coupée par la bissectrice de l'angle des tangentes menées aux extrémités de l'arc.*

Considérons deux cordes infiniment voisines AB, A'B', qui se coupent en I (*fig.* 13). Puisque les arcs AB, A'B' ont même longueur, l'arc AA' sera égal à l'arc BB'; or les deux triangles AA'I, BB'I, qui ont un angle égal en I, donnent

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{\sin SA'I}{\sin SB'I} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{B'S}{A'S}.$$

Si l'on passe à la limite, on a

$$\lim \frac{AA'}{BB'} = 1, \quad \lim \frac{B'S}{A'S} = \frac{BT}{AT}, \quad \lim \frac{AI}{BI} = \frac{A\omega}{B\omega},$$

T étant le point de concours des tangentes en A et B, et ω la limite encore inconnue des positions du point I, c'est-à-dire le point où l'enveloppe touche la corde; donc

$$\frac{A\omega}{B\omega} = \frac{BT}{AT}.$$

Mais si H est le point où la bissectrice TH coupe la corde AB, on a $\frac{BT}{AT} = \frac{BH}{AH}$; donc,

$$\frac{A\omega}{B\omega} = \frac{BH}{AH}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} A\omega = BH, \\ B\omega = AH: \end{cases}$$

ce qui démontre que le point ω est symétrique du point H par rapport au milieu de AB. C. Q. F. D.

Dans le cercle, ces deux points se confondent avec le milieu de la corde.

2. *L'enveloppe des cordes de même longueur, dans une courbe plane quelconque, touche chacune de ces cordes en un point qui est le symétrique, par rapport au milieu de la corde, du pied de la perpendiculaire abaissée, sur sa direction, du point de concours des tangentes à ses extrémités.*

Soient AB, A'B' deux cordes infiniment voisines et égales: de leur point de concours I comme centre, décrivons les deux arcs $A'a$, $B'b$; on aura

$$ab = A'B' = AB, \quad \text{d'où} \quad Aa = Bb, \quad \text{et} \quad \frac{A'I}{B'I} = \frac{A'a}{B'b}.$$

Lorsque A'B' se rapproche indéfiniment de AB, les directions des cordes $A'a$, $B'b$ tendent à devenir perpendiculaires à AB; donc

$$\lim \frac{A'a}{B'b} = \lim \frac{Aa \cdot \operatorname{tang} SAI}{Bb \cdot \operatorname{tang} SBI} = \lim \frac{\operatorname{tang} SAI}{\operatorname{tang} SBI}.$$

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du point S

sur AB; on a

$$\frac{\text{tang SAI}}{\text{tang SBI}} = \frac{\text{BH}}{\text{AH}}; \quad \text{donc} \quad \lim \frac{\text{A}'a}{\text{B}'b} = \lim \frac{\text{BH}}{\text{AH}},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\text{AI}}{\text{BI}} = \lim \frac{\text{BH}}{\text{AH}}.$$

Mais la limite du point H est le pied de la perpendiculaire abaissée du point de concours des tangentes sur AB; le théorème est donc démontré.

3. *L'enveloppe des cordes qui sous-tendent, dans une courbe plane quelconque, des segments équivalents, touche chacune de ces cordes en son milieu* (fig. 15).

Puisque les segments AA'B, A'BB' sont équivalents, il en sera de même des deux secteurs IAA', IBB'; et, comme la limite du rapport de chaque secteur au triangle homologue est l'unité, on aura aussi

$$\lim \frac{\text{triangle IAA}'}{\text{triangle IBB}'} = 1, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\text{IA}.\text{IA}'}{\text{IB}.\text{IB}'} = 1,$$

ou

$$\lim \frac{\overline{\text{IA}}^2}{\overline{\text{IB}}^2} = 1, \quad \text{ou enfin} \quad \lim \frac{\text{IA}}{\text{IB}} = 1.$$

C. Q. F. D.

On peut démontrer ce dernier théorème par le calcul, d'une manière assez simple; cependant la démonstration géométrique a l'avantage. Voici la démonstration analytique que nous proposerions :

Équation de la courbe AB... $y = \varphi(x)$;

(1) Équation de la corde AB.... $y = ax + b$;

condition d'invariabilité du segment,

(2) $$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x) - ax - b]\, dx = \text{const.}$$

Si l'on différentie l'équation (1) par rapport au paramètre a, en y regardant b comme une fonction implicite de a, déterminée par l'équation (2), il vient

$$(3) \qquad x + \frac{db}{da} = 0.$$

Le point de contact cherché sera déterminé par le système des équations (1) et (3), après qu'on y aura remplacé $\frac{db}{da}$ par sa valeur tirée de l'équation (2). En différentiant sous le signe somme, on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(x + \frac{db}{da}\right) dx - [\varphi(x_1) - ax_1 - b]\frac{dx_1}{da} + [\varphi(x_0) - ax_0 - b]\frac{dx_0}{da} = 0.$$

Or

$$\varphi(x_1) - ax_1 - b = 0, \quad \varphi(x_0) - ax_0 - b = 0,$$

et, si l'on effectue l'intégration indiquée, il reste

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{2} + \frac{db}{da}(x_1 - x_0) = 0;$$

d'où

$$\frac{db}{da} = -\frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne, pour l'abscisse du point de contact de la corde et de l'enveloppe,

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

4. *L'enveloppe des cordes de contact d'un angle* T *invariable, circonscrit à une courbe plane, touche chaque corde en un point qui la divise en deux segments proportionnels aux projections des rayons de courbure adjacents sur la direction de la corde* (fig. 16).

Soient AB, A′B′ deux positions infiniment voisines de la

corde de contact; φ, φ' les angles que les tangentes AT, BT font avec une droite fixe; AC, BD les rayons de courbure des points A et B.

Puisque l'angle ATB doit rester invariable, on aura

$$\varphi - \varphi' = \text{const.}; \quad \text{d'où} \quad d\varphi = d\varphi'.$$

Or $$AC = \lim \frac{AA'}{d\varphi}, \quad BD = \lim \frac{BB'}{d\varphi'} = \lim \frac{BB'}{d\varphi}:$$

donc

$$\frac{AC}{BD} = \lim \frac{AA'}{BB'}.$$

On a, d'ailleurs (1°),

$$\lim \frac{AI}{BI} = \lim \frac{AA'}{BB'} \times \frac{\sin TAB}{\sin TBA} = \lim \frac{AA'}{BB'} \times \frac{\cos BAC}{\cos ABD};$$

donc, en désignant par ω la limite des positions du point I,

$$\frac{A\omega}{B\omega} = \frac{AC . \cos BAC}{BD . \cos ABD} = \frac{AH}{BK}.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas du cercle, les points H et K, et par suite le point ω, se confondent avec le milieu de la corde.

Ce théorème n'est pas celui de M. Magnus; la propriété démontrée analytiquement par ce géomètre se résume dans la construction suivante :

Le point de contact de la corde et de l'enveloppe est le symétrique, par rapport au milieu de la corde, du point où celle-ci est coupée par la perpendiculaire abaissée du sommet T *de l'angle circonscrit, sur la droite* RS *qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère* ABDC.

Pour déduire cette construction du théorème précédent, tout se réduit à prouver qu'en désignant par ε le point où la perpendiculaire abaissée du point T sur RS rencontre AB, on a

$$\frac{A\varepsilon}{B\varepsilon} = \frac{BK}{AH}, \quad \text{ou, ce qui revient au même,} \quad \frac{A\varepsilon}{B\varepsilon} = \frac{BD . AT}{AC . BT}.$$

Cette relation constitue une *propriété appartenant à tout quadrilatère* (ABDC), dont voici l'énoncé :

Si, par le point de concours (T) (fig. 17), *des perpendiculaires élevées de deux sommets consécutifs* (A, B) *sur les côtés opposés* (AC, BD) *qui y aboutissent, on mène une perpendiculaire* ($T\varepsilon$) *à la droite* (RS) *qui joint les milieux des diagonales, cette perpendiculaire divisera le côté* AB *en deux segments* ($A\varepsilon$, $B\varepsilon$) *inversement proportionnels aux projections des côtés* AC *et* BD *sur* AB.

En effet, soient P, Q, X, Y les projections des sommets A, B, C, D sur la droite $T\varepsilon$, α et β les inclinaisons de AT et de BT sur la même droite; on a

$$\frac{A\varepsilon}{B\varepsilon}=\frac{AP}{PQ},\quad AT=\frac{AP}{\sin\alpha},\quad BT=\frac{BQ}{\sin\beta},\quad AC=\frac{PX}{\sin\alpha},\quad BD=\frac{QY}{\sin\beta},$$

d'où $$\frac{BD.AT}{AC.BT}=\frac{AP}{BQ}\cdot\frac{QY}{PX};\quad \text{mais}\quad PX=QY,$$

car, soit O le point de rencontre de la médiane RS avec la perpendiculaire $T\varepsilon$, on a

$$PX=PO+OX=PO+OQ=OY+OQ=QY;$$

donc, enfin,

$$\frac{BD.AT}{AC.BT}=\frac{AP}{BQ}=\frac{A\varepsilon}{B\varepsilon}.$$

C. Q. F. D.

5. Nous terminerons ce chapitre en démontrant, par la synthèse géométrique, diverses propriétés appartenant à une classe particulière de courbes enveloppes, *aux caustiques par réflexion dans le cercle*.

Rappelons d'abord la formule de Petit (*fig.* 18). Soient P le point lumineux, Pm, Pm' deux rayons incidents infiniment voisins, mB, $m'B'$ les rayons réfléchis correspondants qui se coupent au point T. Ce point T, à la limite, appartient à l'enveloppe des rayons réfléchis, c'est-à-dire à la caustique. Soient $Pm=p$, $Tm=p'$, $Am=4a$.

La formule de Petit établit une relation entre p, p' et a. Voici comment on y parvient.

L'angle d'incidence étant constamment égal à l'angle de réflexion, les rapports des accroissements différentiels de ces deux angles à l'élément mm' de l'arc du cercle réflecteur seront égaux, ces rapports étant pris à leurs limites. On a ainsi

$$\frac{CC' - AA'}{mm'} = \frac{BB' - CC'}{mm'},$$

ou, comme $CC' = mm'$,

$$2 = \frac{AA'}{mm'} + \frac{BB'}{mm'}.$$

Or, à cause des triangles semblables (mPm', APA'), (mTm', BTB'), on a, en prenant toujours les rapports à leurs limites,

$$\frac{AA'}{mm'} = \frac{PA}{Pm} = \frac{4a - p}{p}, \quad \frac{BB'}{mm'} = \frac{4a - p'}{p'}.$$

Substituant dans l'équation précédente, il vient

$$(1) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}.$$

La figure suppose le point lumineux P intérieur au cercle.

Si le point P était extérieur au cercle, il faudrait changer le signe de p dans la formule (1).

Nous nous bornerons à considérer le *cas où le point* P *est situé sur la circonférence du cercle réflecteur* (fig. 19).

Si dans l'équation (1) on fait $p = 4a$, on en tire $p' = \frac{4}{3}a$; c'est-à-dire $mT = \frac{1}{3}Bm$. *Le rayon réfléchi touche la caustique en un point dont la distance au point d'incidence est le tiers de la corde que produit ce rayon.*

Si l'on prend sur le prolongement de PO une distance OR égale au tiers du rayon du cercle, AR sera égale à $\frac{1}{3}$ PA; en sorte que le point R sera celui où la caustique rencontre

le diamètre PA qui est à la fois rayon incident et réfléchi. Ce diamètre est évidemment un axe de la courbe.

Un cercle décrit sur PR comme diamètre, interceptera sur chaque rayon incident Pm un segment égal aux $\frac{2}{3}$ de ce rayon; par conséquent, le segment extérieur sera précisément égal au rayon réfléchi mT, ce qui fournit un moyen simple de construire la caustique par points.

La droite RT *est parallèle à la normale* Om. En effet, Om étant bissectrice de l'angle PmS, on a

$$\frac{\mathrm{OS}}{m\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{OP}}{m\mathrm{P}} = \frac{\frac{1}{3}\mathrm{OP}}{\frac{1}{3}m\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OR}}{m\mathrm{T}}.$$

Cette propriété fournirait aussi une construction graphique de la caustique. L'équation de cette courbe en coordonnées polaires s'en déduit très-simplement. En effet, prenons le point R pour pôle et le diamètre PRA pour axe, et posons RT $= r$, angle TRA $= \theta$, O$m = b$. En projetant le contour polygonal ORTm sur Om, on a

$$\mathrm{O}m = \mathrm{OR}\cos\theta + \mathrm{RT} + m\mathrm{T}\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

ou

$$b = \frac{b}{3}\cos\theta + r + \tfrac{2}{3}b\cos^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad r = \tfrac{2}{3}b(1 - \cos\theta).$$

La caustique est donc *une épicycloïde engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon* $\frac{b}{3}$, *roulant sur un cercle fixe de même rayon et concentrique au cercle réflecteur.*

Cette épicycloïde touche l'axe de symétrie PA au point R, qui est un point de rebroussement, et elle a en P un contact du deuxième ordre avec le cercle réflecteur.

Cherchons la longueur de l'arc PnT que nous désignerons par s. L'équation (2) fournit la valeur de $\frac{dr}{d\theta}$ qu'on

substitue dans l'expression de ds, et il vient

$$ds = -\frac{4b}{3}\sin\tfrac{1}{2}\theta.d\theta,$$

d'où

$$s = \frac{8b}{3}\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{4}{3}\,\mathrm{P}m,$$

ou encore

$$s = \mathrm{P}m + m\mathrm{T}.$$

Ainsi *la caustique est rectifiable, et l'arc compté à partir du point lumineux est égal à la somme des deux rayons incident et réfléchi* (ce dernier étant limité au point où il touche la caustique).

La longueur de la demi-caustique PnR est égale au double de sa corde PR.

Si l'on prolonge mT d'une quantité mP′ égale à mP, on aura arc PnT $=$ TP′; par conséquent, le lieu des points P′ est une développante de la caustique. L'équation de ce lieu s'obtient en projetant le contour polygonal POmP′ sur PP′, qui est parallèle à Om. Soient PP′$=$R, P′PA$=\Theta$; on trouve

$$\mathrm{R} = 2b(1 + \cos\Theta).$$

Ainsi, *la développante de la caustique est une nouvelle épicycloïde engendrée par un cercle de rayon b* (c'est-à-dire triple de celui du cercle générateur de la caustique) *roulant sur un cercle de même rayon,* qui n'est autre que le cercle réflecteur. Les deux épicycloïdes sont tournées en sens inverse.

Ces derniers résultats pouvaient être obtenus sans calcul, en remarquant que le point P′ appartient visiblement à un cercle égal au cercle réflecteur, dont le centre o' est sur le prolongement de om, et dont l'arc mP′ égale l'arc mP. Conséquemment, si l'on faisait rouler le cercle o' sur le cercle o, à partir du point de contact P, ce dernier point, emporté avec le cercle mobile, décrirait la développante dont il s'agit.

Dans le cas général où le point lumineux P est placé d'une manière quelconque dans le plan du cercle réflecteur, le lieu des points P', tels que $mP' = mP$, est une *épicycloïde rallongée* ou *raccourcie,* selon que le point lumineux est intérieur ou extérieur au cercle.

La seconde épicycloïde remplirait évidemment le rôle d'une caustique relative à un cercle réflecteur concentrique au premier, et d'un rayon triple. Or, cette épicycloïde a pour développée la première épicycloïde, c'est-à-dire la caustique proposée. On conclut de là que *la caustique proposée a elle-même pour développée une troisième épicycloïde ou caustique relative à un cercle réflecteur concentrique au premier, et d'un rayon trois fois plus petit.*

CHAPITRE VII.

EXERCICES SUR LE CALCUL DES VARIATIONS.

1. *Déterminer, parmi toutes les lignes d'une longueur donnée et terminées à deux points fixes* (A, B), *celle pour laquelle la somme des produits de chaque élément ds par le carré de sa distance à la droite* AB *est un maximum.* Cette somme représente, en Mécanique, le *moment d'inertie* d'une ligne matérielle supposée homogène.

(Ce problème a été proposé au concours d'agrégation de 1848 par M. Sturm, qui a fourni sur ce sujet plusieurs indications utiles à l'auteur.)

Prenons la droite AB pour axe des x (*fig.* 20), et le point A pour origine; l'intégrale qu'il faut rendre maximum est $\int_0^b (y^2+z^2)\,ds$, b désignant la distance AB; et si $2l$ désigne la longueur donnée de la courbe, on doit avoir $\int_0^b ds = 2l$.

D'après la règle d'Euler pour les maxima relatifs, on posera

$$\int_0^b \delta(y^2+z^2+a)\,ds = 0.$$

Nous allons d'abord démontrer que la *courbe est plane.*

Comme les limites sont fixes, on peut ne pas attribuer de variations à l'une des coordonnées; nous choisirons x pour la symétrie. En effectuant, d'après cette convention, les différentiations indiquées par le signe δ dans l'équation

précédente, puis égalant séparément à zéro les coefficients de δy et δz, on obtient les deux équations

$$2y\,ds - d.(y^2 + z^2 + a)\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$2z\,ds - d.(y^2 + z^2 + a)\frac{dz}{ds} = 0:$$

Si l'on multiplie la première par z, la seconde par y, et qu'on retranche les produits, on a une différentielle exacte dont l'intégrale est

$$(y^2 + z^2 + a)\left(z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right) = c;$$

au point A, z et y sont nulles; d'ailleurs les cosinus $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ restent finis : donc la constante $c = 0$. Par suite, comme le facteur $(y^2 + z^2 + a)$ (qui se réduit à a au point A) n'est pas nul pour tous les points de la courbe, il faut que l'autre facteur soit nul.

On a donc $$z\,dy - y\,dz = 0,$$

d'où $$z = ky,$$

équation d'un plan conduit suivant l'axe AB, et dans lequel est située la courbe.

Prenons ce plan pour celui des xy. Afin de déterminer plus simplement la forme de la courbe, il convient de reprendre le calcul en partant de l'équation

$$\int_0^b \delta.(a - y^2)\,ds = 0,$$

dans laquelle on pourra ne pas faire varier l'ordonnée y. On obtient ainsi, sans difficulté, l'intégrale première

$$(1) \qquad (a - y^2)\frac{dx}{ds} = c,$$

c étant une constante arbitraire.

On peut toujours faire en sorte que $\frac{dx}{ds}$ soit positif au point A, en y plaçant l'origine des arcs. Cela posé, l'équation (1) montre que les constantes c et a sont de même signe, et, de plus, que c est $< a$, puisqu'elle donne, au point A, $c = a\left(\frac{dx}{ds}\right)_0$. Remarquons, en outre, que $\frac{dx}{ds}$ ne peut devenir négatif en aucun point de la courbe, car il faudrait, pour cela, que $\frac{dx}{ds}$, qui est une fonction finie et continue de x, passât par zéro; d'où résulterait $c = 0$: ce qui est impossible. Ainsi, l'arc et l'abscisse varient constamment dans le même sens de A en B.

Il y a un point C (*fig.* 21) dont l'ordonnée est maximum, pour lequel $\frac{dx}{ds} = 1$. L'ordonnée de ce point est $\sqrt{a-c}$, quantité réelle d'après ce qui a été dit ci-dessus, et pour toute valeur de $y > \sqrt{a-c}$, $\frac{dx}{ds}$ serait > 1, ou $\frac{dy}{dx}$ imaginaire. On voit ici pourquoi nous sommes partis de l'équation $\int_0^b \delta(a-y^2)\,ds = 0$, et non pas de celle-ci : $\int_0^b \delta(y^2+a)\,ds = 0$, qui diffère de la précédente par le signe de l'indéterminée a. En effet, cette seconde forme, tout aussi admissible que l'autre à priori, nous eût conduit à l'ordonnée maximum $y = \sqrt{c-a}$, et comme $c < a$, cette ordonnée eût été imaginaire.

La propriété de maximum dont jouit la courbe AmB apprend que cette courbe doit être concave vers l'axe des x dans tout son cours; car si elle était convexe dans le voisinage de A, par exemple (*fig.* 22), comme elle doit aboutir en B, elle devrait présenter quelque part un point d'inflexion E; or, en repliant l'arc rentrant EmF autour de la

corde EF pour le mettre en saillie $Em'F$, on agrandirait visiblement les distances des divers éléments de l'arc à l'axe AB, sans changer leurs longueurs; et, par suite, l'intégrale $\int_0^b y^2 ds$, serait plus grande pour la courbe $Am'B$ que pour AmB, ce qui est absurde. La concavité de la courbe vers l'axe étant établie, il en résulte que $\frac{dx}{ds}$ va en croissant avec s; donc $\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}$ est positif, et, par suite, en différentiant l'équation (1), on voit que la constante a est positive.

On tire de l'équation (1),

$$dx = \frac{\pm c\,dy}{\sqrt{(a-y^2)^2-c^2}}. \tag{2}$$

Cette valeur de dx est affectée du double signe $\pm$; mais le signe $+$ seul doit être pris à partir de l'origine A jusqu'en C, puisque, dans cet intervalle, y croît avec x; et, de C en B, on doit prendre le signe $-$; ainsi, pour des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ égales et de signes contraires, on a des valeurs égales de y : on en conclut que la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe des x menée par le point C, pour lequel $\frac{dy}{dx}=0$. Soit $AB = 2b$, l'abscisse AD du point le plus haut sera égale à b, et l'on aura

$$b = c\int_0^{\sqrt{a-c}} \frac{dy}{\sqrt{(a-y^2)^2-c^2}}, \tag{3}$$

première équation de condition entre les constantes a et c. Puis, comme la longueur de l'arc AC doit être égale à l, on

aura, entre les mêmes constantes, l'équation

$$(4)\qquad l = \int_0^{\sqrt{a-c}} \frac{(a-y^2)\,dy}{\sqrt{(a-y^2)^2-c^2}};$$

mais ces quadratures ne sont pas exécutables.

Si la longueur donnée l différait peu de b, en sorte que la courbe ACB dût s'écarter peu de la corde AB, on pourrait négliger y^4 sous le radical, et l'expression de dx deviendrait intégrable. Ne considérons que la moitié AC de la courbe, ce qui est permis, vu la symétrie; et, pour l'homogénéité, remplaçons a par a^2 et c par ma^2, m est < 1. Nous aurons

$$dx = \frac{am.dy}{\sqrt{a^2(1-m^2)-2y^2}},$$

d'où

$$y = a\sqrt{\frac{1-m^2}{2}}\sin\frac{x\sqrt{2}}{ma};$$

c'est l'équation d'une sinusoïde.

Pour $x = b$, l'ordonnée doit atteindre son maximum; d'où l'on conclut

$$\frac{b\sqrt{2}}{ma} = \frac{\pi}{2}.$$

L'ordonnée correspondante est $\dfrac{a\sqrt{1-m^2}}{2} = \dfrac{2b\sqrt{1-m^2}}{m\pi}$; par suite, l'équation de la courbe prend la forme

$$y = \frac{2b\sqrt{1-m^2}}{m\pi}\sin\frac{\pi x}{2b},$$

où il ne restera plus que la constante m à déterminer, par la condition que la longueur du demi-arc AC soit égale à l. La valeur de m dépendra d'une fonction elliptique.

Bien que nous n'ayons considéré que le signe + du radical, dans l'intégration précédente, l'équation ci-dessus

n'en représente pas moins toute la courbe, puisque la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qu'on en tire, change de signe quand x atteint et dépasse b, et reprend de $x = b$ à $x = 2b$, les mêmes valeurs absolues que de $x = 0$ à $x = b$.

L'équation (2) se présentera de nouveau dans un problème de mécanique, que nous traiterons dans la troisième partie de cet ouvrage (livre premier, chapitre IV).

2. *Étant donnés deux plans parallèles, et un point* A *dans l'un d'eux, on propose de mener de ce point à l'autre plan, une ligne de longueur donnée, telle que l'aire de la surface cylindrique ayant cette ligne pour directrice, et pour génératrices des perpendiculaires terminées aux deux plans, soit maximum ou minimum* (fig. 23).

Soit MAN le plan qui renferme le point donné A; prenons l'autre plan pour celui des xy, et pour axe des z la perpendiculaire abaissée du point A : soit $Ao = h$; x_0, y_0 les coordonnées du point indéterminé B, où la ligne cherchée doit rencontrer le plan des xy. Puisque la hauteur h de la surface cylindrique est constante, l'aire de la portion $AoBC$ aura pour expression $h\int_0^{x_0}\sqrt{dx^2+dy^2}$. Cette intégrale doit être maximum ou minimum, en même temps que $\int_0^{x_0} ds$ ou $\int_0^{x_0}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ doit être égale à une constante l.

La règle des maxima relatifs fournit l'équation

$$\int_0^{x_0}\delta\left(ds + a\sqrt{dx^2+dy^2}\right) = 0;$$

en la développant, on trouve les trois équations différen-

tielles :

$$d\left(\frac{dx}{ds}+a\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0,$$

$$d\left(\frac{dy}{ds}+a\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0,$$

$$d\frac{dz}{ds}=0,$$

qui se réduisent, comme on sait, à deux distinctes. D'ailleurs, en multipliant la première par $\frac{dx}{ds}$, la deuxième par $\frac{dy}{ds}$, la troisième par $\frac{dz}{ds}$, et ajoutant les produits, on trouve une identité.

L'intégration donne

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds}+a\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=C,\\ &\frac{dy}{ds}+a\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=C',\\ &\frac{dz}{ds}=C''; \end{aligned}\right.$$

C, C′, C″ sont trois constantes arbitraires, entre lesquelles il existe une relation que fournit la condition

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1;$$

mais il est inutile de la chercher.

Quant à l'équation aux limites, les termes relatifs à la limite fixe A disparaissent, et ceux relatifs à la limite B se partagent dans les deux équations suivantes :

$$\left(\frac{dx}{ds}+a\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)_{x_0}=0,\quad \left(\frac{dy}{ds}+a\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)_{x_0}=0,$$

où x et y doivent être remplacées par les coordonnées x_0,

y_0 du point B. Mais, comme les premiers membres de ces équations sont constants pour tous les points de la ligne cherchée, en vertu des équations (1), les constantes C et C′ sont nulles; par suite, les deux premières équations (1) se réduisent à

$$(2)\qquad \frac{dx}{ds}\left(1+\frac{a\,ds}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0,\quad \frac{dy}{ds}\left(1+\frac{a\,ds}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0.$$

On y satisfait d'abord en posant

$$\frac{dx}{ds}=0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds}=0;$$

ce qui indiquerait, pour la ligne cherchée, la direction de l'axe oz; l'aire de la surface cylindrique correspondante serait nulle.

Cette solution peut être admise comme un *minimum* dont la surface cylindrique s'approche indéfiniment, à mesure que le point B se rapproche de l'origine o, et que la ligne AmB tend à prendre une direction perpendiculaire aux deux plans.

On satisfait encore aux équations (2) en posant

$$(3)\qquad \sqrt{dx^2+dy^2}+a\,ds=0.$$

Or on a

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{ds^2-dz^2};$$

on en conclut

$$dz=\pm\sqrt{1-a^2}\,.\,ds.$$

Ce résultat s'accorde avec la troisième des équations (1) qui est une conséquence des équations (2). L'intégration donne

$$z=\sqrt{1-a^2}\,.\,s.$$

En convenant de compter l'arc s, à partir du plan des xy, on déterminera la constante a par la condition que, pour

$z = h$, on ait $s = l$, d'où $\sqrt{1-a^2} = \frac{h}{l}$. On a enfin

$$z = h\frac{s}{l}.$$

Ainsi, l'analyse ne fournit qu'*une relation entre l'arc*, compté à partir de l'un des plans, et *l'ordonnée* perpendiculaire à ce plan; l'ordonnée croît proportionnellement à l'arc : la ligne cherchée est donc *une hélice*. Quant à la surface cylindrique sur laquelle cette hélice est située, et dont l'aire est un maximum, elle est indéterminée de forme et de position; seulement, l'arc onB, qui lui sert de base, sera assujetti à une condition de longueur. En effet, désignons par σ l'arc Bn dont la différentielle est $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; l'équation (3) dans laquelle on remplacera a par sa valeur, donne

$$d\sigma = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}ds, \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}s,$$

et si l'on fait $s = l$, on en tire arc $Bno = \sqrt{l^2 - h^2}$. Tous les cylindres qui auront pour base une courbe de cette longueur, quelle que soit d'ailleurs sa forme, auront une aire équivalente à l'aire maximum.

Réciproquement, quand on aura fait choix d'une courbe onB dont la longueur soit $\sqrt{l^2 - h^2}$, la figure de la ligne AmB sera déterminée par la condition qu'elle soit un arc d'hélice tracé sur la surface cylindrique $AonB$.

En effet, soit z l'ordonnée mn correspondant à un arc $Bn = \sigma$, on aura $z = k\sigma$, k étant un coefficient constant dont la valeur s'obtiendra en faisant à la fois

$$z = h, \quad \sigma = \sqrt{l^2 - h^2}, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}},$$

et, par suite,

$$z = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}\sigma,$$

On en conclut la différentielle de l'arc s ou Bm :

$$ds = \sqrt{d\sigma^2 + dz^2} = dz\sqrt{1 + \frac{l^2 - h^2}{h^2}} = \frac{l}{h}dz,$$

d'où

$$s = \frac{l}{h}z,$$

et pour $z = h$, $s = l$, ce qui devait être.

Solution synthétique du même problème. — On peut obtenir sans calculs tous les résultats auxquels nous venons de parvenir.

Supposons que la surface cylindrique qui jouit de la propriété du maximum ait été développée sur un plan ; le développement sera un rectangle AoQM, dont la base oQ aura même longueur que l'arc onB, et puisque la hauteur Ao est une constante donnée h, cette base devra être maximum, en même temps que la ligne menée du point A au point Q (transformée de la ligne AmB), aura une longueur donnée l ; il faut donc que cette tranformée soit une ligne droite, et, par suite, la ligne AmB dans l'espace sera un arc d'hélice. De plus, on aura $o\text{Q} = \sqrt{l^2 - h^2}$. Telle est donc aussi la longueur de l'arc onB, base de la surface cylindrique, etc.

Remarque. — Si le point B, au lieu d'être seulement assujetti à être situé dans le plan des xy, avait été donné par la question, ainsi que A, en sorte que la ligne cherchée dût aboutir à deux points fixes des deux plans, la synthèse précédente subsisterait sans modification, et la ligne qui, menée du point A au point B, engendrerait une aire cylindrique maximum, serait toujours un arc d'hélice. Mais, indépendamment du maximum, il existe alors une *aire cylindrique minimum*, différente de zéro. En effet, la surface cylindrique dont l'aire est minimum, doit avoir pour base, sur le plan des xy, la ligne la plus courte que l'on puisse tracer

du point o au point B. Donc, cette base sera la ligne droite oB, et, par conséquent, la surface cylindrique sera *le plan* AaBC.

Quant à la directrice qui va de A à B, sa figure est indéterminée : elle doit seulement satisfaire à la condition que sa longueur soit égale à l. Le problème ne sera possible qu'autant que l'on aura

$$l \geqq \sqrt{h^2 + \overline{oB}^2}\,.$$

Il est à remarquer qu'ici la surface cylindrique à aire minimum est déterminée, et la ligne AmB reste arbitraire, tandis que pour la surface cylindrique à aire maximum, c'était le contraire qui avait lieu.

Le calcul des variations, appliqué au cas qui nous occupe, où la limite B est supposée fixe, ne rend pas un compte exact des faits que la synthèse a mis en évidence d'une manière si simple :

L'équation aux limites est alors identique et ne fournit plus aucun renseignement sur les constantes C et C′ qui entrent dans les deux premières équations (1). En les divisant l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C'}{C}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{C'}{C}x.$$

La projection de la ligne AmB sur le plan des xy est donc la ligne droite oB, et, par suite, la surface cylindrique se réduit au plan AoBC. Comme les coordonnées x_0, y_0 du point B doivent vérifier l'équation précédente, on a $\frac{C'}{C} = \frac{y_0}{x_0}$; Ce rapport est ainsi complétement déterminé, indépendamment de la constante a et de la longueur donnée l; mais l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{C'}{C}$ ne peut tenir lieu des deux équations (1);

et si l'on remplace dans l'une d'elles $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur, et $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ par $\sqrt{ds^2 - dz^2}$, on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \text{const.}$$

La projection sur le plan des zx serait donc aussi une ligne droite, et, par suite, la ligne AmB dans l'espace serait droite, ce qui est en contradiction avec les résultats obtenus plus haut.

La règle d'Euler, pour les maxima relatifs, paraît donc ici en défaut. Cette anomalie tiendrait-elle à ce que le point B étant donné de position, la projection de la ligne cherchée sur le plan des xy est par cela même déterminée, *sans que la longueur l de la ligne y entre pour rien;* en sorte que celle-ci reste entièrement arbitraire? L'intégrale $\int_0^{x_0} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ étant alors un *minimum absolu,* la recherche de la surface cylindrique, dont l'aire est minimum, ne serait pas, à proprement parler, une question de *minimum relatif.*

3. *On suppose que la différentielle d'une fonction* T *des variables x, y, z soit exprimée par*

$$(1) \qquad dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

x, y, z étant des fonctions connues de x, y, z, et l'on propose de déterminer, entre toutes les courbes terminées à deux points donnés, celle pour laquelle l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} T\,ds$ *est un minimum* (*ds* est l'élément différentiel de l'arc de la courbe cherchée, et x_0, x_1 désignent les *abscisses des deux points donnés*); on doit avoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(T\,ds) = 0,$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\mathrm{T}\left(\frac{dx}{ds}\delta dx+\frac{dy}{ds}\delta dy+\frac{dz}{ds}\delta dz\right)+ds(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z)\right]=0.$$

Intégrant par parties les termes où les caractéristiques δ, d sont superposées, et remarquant que la partie hors du signe $\int$ qui provient de cette intégration est identiquement nulle à cause des limites fixes, on trouve les trois équations

$$d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds}-\mathrm{X}ds=0,$$

$$d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds}-\mathrm{Y}ds=0,$$

$$d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds}-\mathrm{Z}ds=0;$$

deux d'entre elles comportent la troisième, en vertu de la relation (1). Ces équations sont précisément celles qui déterminent la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible attaché aux deux points donnés, et dont chaque point est soumis à l'action d'une force ayant pour composantes rapportées à l'unité de longueur, X, Y, Z; la fonction (T) représente la tension en ce point.

Cette remarque nous dispense d'insister sur l'intégration de ce système d'équations.

Si la courbe cherchée avait été assujettie à avoir entre les deux points extrêmes une longueur donnée l, on aurait posé, conformément à la règle des maxima relatifs,

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta(\mathrm{T}+a)\,ds=0,$$

a étant une constante indéterminée; et il est clair qu'on serait parvenu à trois équations qui n'auraient différé des précédentes, qu'en ce que T aurait été changé en $\mathrm{T}+a$.

Ces équations appartiendraient encore à la figure d'équilibre d'un fil flexible placé dans les mêmes conditions que ci-dessus, et ayant de plus la longueur donnée l.

Ainsi l'analyse nous conduit à cette propriété remarquée par Euler, que si $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte dT d'une fonction des trois variables x, y, z, la courbe formée par le fil en équilibre sous l'action des forces (X, Y, Z), sera, entre toutes les courbes de même longueur passant par les deux mêmes points, celle pour laquelle l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} T\,ds$ prise entre ces points est un minimum.

Ce théorème s'étend, sans difficulté, au cas où la courbe est assujettie à être située sur une surface.

4. *Déterminer une courbe plane, d'une longueur donnée, et terminée à deux points fixes, telle que l'ordonnée de chacun de ses points, perpendiculaire à un axe donné, soit proportionnelle à une certaine puissance de l'ordonnée correspondante à la même abscisse, d'une deuxième courbe, dont l'aire rapportée au même axe et aux deux limites fixes soit un maximum.*

Soient (x_0, y_0), (x_1, y_1) les coordonnées des deux points limites A et B (*fig.* 24); y, Y deux ordonnées correspondantes mP, m'P des deux courbes; on a par hypothèse

$$Y = ky^n,$$

k et n étant des quantités constantes données, et la condition du maximum s'exprime par

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta\left(ky^n\,dx + a\sqrt{dx^2 + dy^2}\right) = 0.$$

On trouve sans difficulté

$$ky^n + a\frac{dx}{ds} = c,$$

c étant une constante arbitraire; d'où

$$dx = \frac{(ky^{n} - c)\,dy}{\sqrt{a^2 - (ky^n - c)^2}}.$$

Pour $n = 2$, cette équation est celle de la *courbe* nommée *élastique*.

Pour $n = \frac{1}{2}$ et $c = 0$, cette équation représente une *cycloïde* dont le cercle générateur a pour diamètre $\frac{a}{k}$. L'hypothèse $c = 0$ répond au cas où les deux points extrêmes A et B, au lieu d'être fixes, sont assujettis à rester sur des parallèles à l'axe ox.

Pour $n = \frac{1}{3}$, et en général pour toute valeur de n de la forme $\frac{1}{2p+1}$, on trouvera une *courbe algébrique*.

CHAPITRE VIII.

EXERCICES SUR LES MAXIMA ET MINIMA.

1. *Déterminer le volume maximum intercepté dans un hémisphère donné par un parallélipipède rectangle dont la base* oPQR (fig. 25) *a l'un de ses sommets* o *au centre de la sphère, tandis que le sommet opposé* Q *est situé sur la périphérie.*

Soient R le rayon de la sphère, $oP = \alpha$, $oR = \beta$; V le volume oPQRSZT; on a

$$V = \int_0^\alpha dx \int_0^\beta dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

En effectuant l'intégration relative à y, il vient,

$$(1) \quad V = \int_0^\alpha dx \left[\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{R^2 - \beta^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}(R^2 - x^2)\arcsin\frac{\beta}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right].$$

On pourrait achever l'intégration; mais cela n'est pas nécessaire pour la détermination des dimensions du parallélipipède maximum. L'expression précédente de V peut s'écrire

$$V = \int_0^\alpha f(x, \beta)\, dx.$$

Or la condition du maximum fournit l'équation

$$\frac{dV}{d\alpha} + \frac{dV}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0;$$

β est liée à α par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

et, par suite,

$$\beta\frac{dV}{d\alpha} - \alpha\frac{dV}{d\beta} = 0. \tag{2}$$

Comme $\frac{dV}{d\beta}$ ne diffère évidemment de $\frac{dV}{d\alpha}$ que par le changement de α en β, et réciproquement, on aperçoit qu'on aura une solution de l'équation (2) en posant $\alpha = \beta = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$; mais on ne voit pas que cette solution soit la seule. Calculons les deux dérivées de la fonction V,

$$\frac{dV}{d\alpha} = f(\alpha, \beta) = \tfrac{1}{2}(R^2 - \alpha^2)\arcsin\frac{\beta}{\sqrt{R^2-\alpha^2}} = \frac{\pi\beta^2}{4},$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \int_0^\alpha \frac{d.f(x,\beta)}{d\beta}\,dx = \int_0^\alpha \sqrt{R^2 - x^2 - \beta^2}.\,dx = \frac{\pi\alpha^2}{4}.$$

(Ce dernier calcul n'était pas nécessaire, vu la symétrie déjà remarquée.) Substituant dans l'équation (2), il vient

$$\beta^3 - \alpha^3 = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta = \alpha.$$

La valeur correspondante de la différentielle seconde de la fonction V, ou

$$d^2V = \left[\frac{d^2V}{d\alpha^2} + 2\frac{d^2V}{d\alpha\,d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d^2V}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right]d\alpha^2,$$

est négative et égale à $-\pi$.

Ainsi, le parallélipipède qui intercepte le volume maximum, a pour base un carré; son côté est moitié du côté du carré inscrit dans le grand cercle de la sphère.

Au reste, la valeur du volume V peut être calculée par la géométrie ordinaire, en remarquant que ce volume est la différence entre le quart de l'hémisphère et la somme de deux calottes APQT, BQRS; on trouve ainsi, sans supposer $\alpha = \beta$,

$$V = \frac{\pi}{12}[3R^2(\alpha+\beta) - (\alpha^3+\beta^3) - 2R^3],$$

et pour $\alpha = \beta = \frac{R}{\sqrt{2}}$,

$$V = \frac{\pi R^3}{24}(5\sqrt{2} - 4);$$

son rapport au huitième de la sphère est $\left(\frac{5}{4}\sqrt{2} - 1\right)$.

Si l'on n'avait pas supposé que le sommet Q de la base aboutît à la périphérie, le calcul de V n'aurait plus été praticable par la géométrie ordinaire; il aurait fallu achever l'intégration indiquée dans la formule (1).

On trouve d'abord

$$\frac{1}{2}\beta \int_0^\alpha dx \sqrt{R^2 - \beta^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\alpha\beta\sqrt{R^2 - \alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{4}\beta(R^2 - \beta^2) \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \beta^2}}.$$

La seconde partie

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha (R^2 - x^2) \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

est moins simple; l'intégration par parties la fera dépendre de l'intégrale

$$A = \int_0^\alpha \frac{\left(R^2 - \frac{x^2}{3}\right) x^2\, dx}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - \beta^2 - x^2}}.$$

Au lieu de la réduire aux fractions rationnelles, il vaut mieux remarquer que

$$d.\arcsin \frac{\beta x}{\sqrt{(R^2 - \beta^2)(R^2 - x^2)}} = \frac{R\beta\, dx}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - \beta^2 - x^2}}.$$

Ajoutons cette différentielle, multipliée par un facteur indéterminé m, à celle qu'il s'agit d'intégrer; il viendra

$$\int_0^\alpha \frac{\left(R^2 - \frac{x^2}{3}\right)x^2 + mR\beta}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - \beta^2 - x^2}}\, dx = A + m.\arcsin \frac{\beta x}{\sqrt{(R^2 - \beta^2)(R^2 - x^2)}}.$$

Or on peut disposer de m de manière que le numérateur du premier membre

$$-\frac{x^4}{3}+R^2x^2+mR\beta$$

soit divisible par R^2-x^2; en effet, le reste de la division est nul pour $m=-\frac{2R^3}{3\beta}$, et le quotient est $\frac{2R^2-x^2}{3}$.

D'après cela, il vient

$$\frac{1}{3}\int_0^\alpha \frac{2R^2-x^2}{\sqrt{R^2-\beta^2-x^2}}dx = A-\frac{2R^3}{3\beta}\text{ arc sin }\frac{\beta x}{\sqrt{(R^2-\beta^2)(R^2-x^2)}}.$$

Le calcul de A est ainsi ramené à celui de l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{2R^2-x^2}{\sqrt{R^2-\beta^2-x^2}}dx$, qui s'obtient aisément.

Toute substitution faite, on trouve

$$V=\frac{1}{3}\alpha\beta\sqrt{R^2-\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{6}\beta(3R^2-\beta^2)\text{ arc sin }\frac{\alpha}{\sqrt{R^2-\beta^2}}$$
$$+\frac{1}{6}\alpha(3R^2-\alpha^2)\text{arc sin}\frac{\beta}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}-\frac{1}{3}R^3\text{arc sin}\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(R^2-\alpha^2)(R^2-\beta^2)}}.$$

On pourra discuter cette expression, dans l'hypothèse où la base du parallélipipède est un carré n'aboutissant pas à la périphérie, c'est-à-dire où $\alpha=\beta$; chercher la condition pour que le volume s'exprime algébriquement sans arc sinus, etc.

2. *Déterminer les dimensions d'un cylindre droit inscrit dans une sphère donnée, telles que la surface ou le volume soit maximum.* (Annales de Gergonne.)

En faisant varier la demi-hauteur x depuis zéro jusqu'au rayon R, on reconnaît, à priori, que la surface *latérale* et le volume sont susceptibles de maximum. Mais rien n'indique qu'il y ait un maximum pour la surface *totale*.

Le calcul donne :

Surface latérale.... $S = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$,

Surface totale...... $\Sigma = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} + 2\pi(R^2 - x^2)$,

Volume...... $V = 2\pi x(R^2 - x^2)$.

L'équation $\frac{dS}{dx} = 0$ donne

$$x = \frac{1}{2}R\sqrt{2};\quad \frac{d^2S}{dx^2} \text{ se réduit à } -16\pi;\quad S = 2\pi R^2.$$

Le cylindre dont la surface latérale est maximum, a donc pour hauteur le côté du carré inscrit, et pour rayon de base la moitié de cette hauteur : sa surface est double de celle d'un grand cercle.

L'équation $\frac{d\Sigma}{dx} = 0$ donne

$$(10x^2 - 3R^2)^2 + 121R^2 = 0,$$

d'où l'on ne tire que des valeurs imaginaires pour x : il n'y a, pour la surface totale, ni maximum ni minimum.

Enfin, l'équation $\frac{dV}{dx} = 0$ donne

$$x = \frac{1}{3}R\sqrt{3};\quad \frac{d^2V}{dx^2} \text{ se réduit à } -4\pi\left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right);\quad V = 4\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^3.$$

En conséquence, le cylindre dont le volume est maximum a pour hauteur les deux tiers du triangle équilatéral inscrit, et le volume est triple de celui d'une sphère dont cette hauteur serait le diamètre.

3. *Parmi tous les arcs de cercle d'une longueur donnée et de rayons différents, déterminer celui auquel correspond un segment maximum.* (Annales de Gergonne, t. XV.)

Soient l la longueur de l'arc ACB (*fig.* 26), x le rayon OA, y l'aire du segment ACBI; on a

aire ACBI = secteur OACB — triangle OAB,

ou
$$y = \frac{1}{2} lx - \frac{1}{2} x^2 \sin\left(\frac{l}{x}\right).$$

Cette formule convient au cas où le segment excéderait le demi-cercle, en ayant égard au signe du sinus.

En égalant à zéro $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\cos\frac{l}{2x}\left(l\cos\frac{l}{2x} - 2x\sin\frac{l}{2x}\right).$$

On satisfait à cette équation de deux manières, en posant

$$\cos\frac{l}{2x} = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\frac{l}{2x} = \frac{l}{2x}.$$

La première solution

$$\cos\frac{l}{2x} = 0 \quad \text{donne} \quad x = \frac{l}{(2n+1)\pi},$$

n étant un nombre positif quelconque. La valeur corespondante de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $-2(2n+1)\pi$.

Donc il y a *maximum*. On trouve ainsi une infinité de segments maxima, dont les aires sont données par la formule

$$y = \frac{l^2}{2(2n+1)\pi}.$$

Le segment *maximum maximorum* correspond à $n = 0$, d'où

$$x = \frac{l}{\pi}, \quad y = \frac{l^2}{2\pi}.$$

C'est un demi-cercle. Chacun des autres segments maxima se compose d'un certain nombre de cercles entiers superposés, plus un demi-cercle.

Le résultat obtenu pour le segment *maximum maximorum* pouvait être prévu, en remarquant que si l'on juxtapo-

sait au segment maximum un second segment égal, de manière qu'ils fussent de côtés différents de la corde commune, on aurait un contour fermé, de longueur $2l$, qui devrait embrasser une aire maximum, propriété qui n'appartient qu'au cercle.

La seconde solution

$$\operatorname{tang}\frac{l}{2x}=\frac{l}{2x}$$

fournit aussi une infinité de valeurs réelles pour x, que l'on pourra construire par l'intersection des deux lieux géométriques

$$y=z,\quad y=\operatorname{tang} z,\quad z \text{ désignant le rapport } \frac{l}{2x}.$$

A ces valeurs de x répondent des *minima* pour la fonction y; car elles réduisent $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $+\frac{l^2}{2x^2}\cos^2\frac{l}{2x}$.

On a aussi, pour ces valeurs de x,

$$y=\frac{l^3 x}{2(4x^2+l^2)}.$$

Pour $x=\infty$, on a $y=0$; l'arc se réduit à une ligne droite.

Les maxima et minima doivent se succéder alternativement. En effet, les valeurs de $\frac{l}{2x}$, qui répondent aux maxima, sont

$$\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\quad \frac{7\pi}{2},\ldots;$$

et si l'on représente par la suite $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les valeurs du même rapport qui répondent aux minima, on a

$$0,\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}<\beta<\frac{5\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2}<\gamma<\frac{7\pi}{2},\ldots$$

On peut se proposer une question de maximum semblable à celle que nous venons de résoudre, pour les volumes des segments sphériques ayant une surface donnée, et appartenant à des sphères de rayons variables.

4. *Étant donnés deux arcs de grands cercles d'une sphère, perpendiculaires entre eux, et deux points* A *et* B *sur l'un d'eux, on propose de déterminer sur l'autre arc un point* C, *tel que l'angle* ACB *du triangle sphérique qui a ces trois points pour sommets, soit maximum ou minimum* (fig. 27).

Soient $\quad DA = a, \quad DB = b, \quad DC = x.$

Le rayon de la sphère étant pris pour unité, on a

$$(1)\quad \text{tang ACB} = \text{tang}(\text{DCB} - \text{DCA}) = \frac{\sin(b-a)\sin x}{\sin a \sin b + \cos a \cos b \sin^2 x}.$$

Posons

$$\sin a \sin b = \text{A}, \quad \cos a \cos b = \text{B}.$$

Comme $\sin(b-a)$ est un facteur constant et positif, il s'agit de déterminer les valeurs de x, propres à rendre maximum ou minimum l'expression

$$y = \frac{\sin x}{\text{A} + \text{B}\sin^2 x}.$$

On égale $\frac{dy}{dx}$ à zéro, et l'on a

$$\cos x(\text{A} - \text{B}\sin^2 x) = 0,$$

équation à laquelle on satisfait de deux manières.

1°. Soit $\cos x = 0$; comme x est compris entre 0 et π, on aura $x = \frac{\pi}{2}$, et pour cette valeur de x, on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(\text{A} - \text{B})}{(\text{A} + \text{B})^2}.$$

Cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négative, si l'on a $A - B > 0$, ou bien

$$\cos(a+b) < 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\pi}{2} < a+b < \frac{3\pi}{2}.$$

Dans ce cas, tang ACB, et, par suite, l'angle ACB lui-même sera *maximum*.

Au contraire, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera positive, si l'on a

$$a+b < \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad a+b > \frac{3\pi}{2},$$

et il y aura *minimum*.

Enfin $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à zéro, si l'on a

$$a+b = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad a+b = \frac{3\pi}{2}.$$

On peut alors recourir aux dérivées d'ordre supérieur, et l'on s'assure ainsi que $\frac{d^3y}{dx^3}$ s'annule, et que $\frac{d^4y}{dx^4}$ prend une valeur négative ; mais il est plus simple de remarquer que l'expression de $\frac{dy}{dx}$, qui se réduit, dans le cas qui nous occupe, à $\frac{\cos^3 x}{A(1+\sin^2 x)^2}$ passe évidemment du positif au négatif, lorsque x atteint et dépasse $\frac{\pi}{2}$. Il y a donc *maximum*.

La formule (1) donne, pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{tang ACB} = \text{tang}(b-a), \quad \text{ou} \quad \text{ACB} = b - a.$$

L'arc $(b-a)$ ou la base AB du triangle qui jouit de la propriété du maximum ou minimum, mesure donc l'angle ACB. Effectivement, si l'on prend l'arc DC′ égal à un quadrant, le point C′ sera le pôle de l'arc de grand cercle DAB ; les côtés AC′, BC′ seront aussi égaux au quadrant.

2°. Soit $A - B\sin^2 x = 0$, d'où $\sin x = \sqrt{\frac{A}{B}}$; nous ne prenons que le signe + du radical, attendu que l'arc x est compris entre 0 et π. Pour que cette valeur de $\sin x$ soit réelle et plus petite que 1, on doit avoir $0 < \frac{A}{B} < 1$, c'est-à-dire

$$\cos a \cos b > 0 \quad \text{et} \quad \cos(a+b) > 0,$$

d'où l'on conclut que les deux arcs a et b devront être tous deux plus petits, ou bien tous deux plus grands que $\frac{\pi}{2}$; et, de plus, leur somme sera, dans le premier cas, plus petite que $\frac{\pi}{2}$; dans le second cas, plus grande que $\frac{3\pi}{2}$. La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, pour $\sin x = \sqrt{\frac{A}{B}}$, est $-\frac{(B-A)}{2A\sqrt{AB}}$: elle est négative; par conséquent il y a *maximum*. La formule (1) donne pour

$\sin x = \sqrt{\frac{A}{B}}$,

$$\tang \text{ACB} = \frac{\sin(b-a)}{\sqrt{\sin 2a \sin 2b}},$$

ou, plus simplement,

$$\sin \text{ACB} = \frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)}.$$

Comme à un même sinus répondent deux arcs supplémentaires, x aura deux valeurs, telles que DC″ et DC‴ $= \pi -$ DC″ (*fig.* 28). Au milieu de l'arc C″C‴ se trouve le point C′ pour lequel l'angle AC′B est minimum, comme on l'a vu dans la première partie de cette discussion.

En résumé, le problème comporte *au plus trois* solutions, savoir : deux maxima séparés par un minimum, et *au moins une* solution qui est alors un maximum. Pour qu'il y ait trois solutions, il faut et il suffit que la somme

$a+b$ soit plus petite que $\frac{\pi}{2}$ ou plus grande que $\frac{3\pi}{2}$; alors, si l'on conçoit que le sommet C du triangle cherché, d'abord situé en D, s'élève sur l'arc de grand cercle dans le sens DCE, l'angle ACB, d'abord nul, ira en croissant et atteindra un premier maximum AC″B, puis un minimum AC′B à 90° de distance des extrémités D et E de l'arc, puis un second maximum AC‴B, C‴ étant aussi distant de E que C″ l'est de D; enfin il redeviendra nul au point E.

Lorsque la somme $a+b$ est égale à $\frac{\pi}{2}$ ou à $\frac{3\pi}{2}$, les deux points C″, C‴ se confondent avec C′; il n'y a plus qu'une solution, et l'angle AC′B est alors maximum.

Enfin, quand la somme $a+b$ est plus grande que $\frac{\pi}{2}$ et plus petite que $\frac{3\pi}{2}$, il n'y a qu'une solution; l'angle AC′B est maximum.

Nous n'avons pas égalé $\frac{dy}{dx}$ à l'infini; on reconnait aisément que cette nouvelle équation ne fournirait ni maximum ni minimum. En effet, la valeur de x qui satisferait à l'équation

$$A + B\sin^2 x = 0$$

rendrait tang ACB infinie, ou l'angle ACB droit; et lorsque x, croissant à partir de o, atteindrait et dépasserait cette valeur, le dénominateur de tang ACB, d'abord positif, deviendrait négatif, tandis que le numérateur conserverait le signe +; l'angle ACB, d'abord aigu, deviendrait obtus: il continuerait donc à croître.

Si l'angle des deux arcs de grands cercles DAE, DCE, n'était pas supposé droit, on serait conduit à chercher le maximum d'une expression de la forme

$$y = \frac{\sin x}{A + B\sin^2 x + C\sin x\cos x}.$$

En égalant $\frac{dy}{dx}$ à o, et prenant pour inconnue $\cot x = z$, on obtiendra une équation du troisième degré en z, privée de second terme. Dans le cas où cette équation aura ses trois racines réelles, on pourra ramener sa résolution à l'équation connue de la trisection de l'angle. Ces racines répondront à deux maxima séparés par un minimum. Nous ne développerons pas ces calculs.

5. Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, à l'exception de l'angle des deux grands cercles que nous supposerons quelconque, on propose de *déterminer le point* C *par la condition que l'aire du triangle sphérique* ACB *soit maximum* (fig. 29).

Soient $DA = a$, $DB = b$, $DC = x$, angle $ADC = \alpha$; S l'aire du triangle ABC rapportée au carré construit sur le rayon pris pour unité; θ et φ les angles du triangle DAC, dont les sommets sont A et C; η et ψ les angles du triangle DBC dont les sommets sont B et C.

On a $$S = \psi + \eta - (\varphi + \theta),\text{ d'où}$$
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}S = \operatorname{tang}\left(\frac{\psi+\eta}{2} - \frac{\varphi+\theta}{2}\right).$$

Or les analogies de Neper donnent

$$\operatorname{tang}\frac{\psi+\eta}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{x-b}{2}}{\cos\frac{x+b}{2}},\quad \operatorname{tang}\frac{\varphi+\theta}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}};$$

on substituera ces valeurs dans le développement de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}S$, et si l'on pose, pour abréger, $\cot\frac{\alpha}{2} = k$, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}S = \frac{k\left(\cos\frac{x-b}{2}\cos\frac{x+a}{2} - \cos\frac{x+b}{2}\cos\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\frac{x+b}{2}\cos\frac{x+a}{2} + k^2\cos\frac{x-b}{2}\cos\frac{x-a}{2}},$$

ou, en remplaçant les produits de cosinus par des sommes, et réduisant :

$$\tang\frac{1}{2}S = \frac{k\sin\frac{b-a}{2}\sin x}{(1+k^2)\left(\cos\frac{b+a}{2}\cos x+\cos\frac{b-a}{2}\right)-(1-k^2)\sin\frac{b+a}{2}\sin x}.$$

Il s'agit donc de déterminer la valeur de x pour laquelle l'expression

$$y = \frac{\sin x}{(1+k^2)\left(\cos\frac{b+a}{2}\cos x+\cos\frac{b-a}{2}\right)-(1-k^2)\sin\frac{b+a}{2}\sin x}$$

est maximum.

En égalant $\frac{dy}{dx}$ à zéro, on trouve simplement

$$(1)\qquad \cos\frac{b+a}{2}+\cos x\cos\frac{b-a}{2}=0.$$

Il est remarquable que la constante k a disparu, en sorte que la valeur cherchée de x est indépendante de l'angle que les deux grands cercles font entre eux. Comme le cosinus de $\frac{b+a}{2}$ est toujours moindre, numériquement, que le cosinus de $\frac{b-a}{2}$, la valeur de $\cos x$ tirée de l'équation précédente est plus petite que 1. Le problème aura donc toujours une solution. Selon que la somme $a+b$ sera plus petite ou plus grande que la demi-circonférence, l'arc x sera lui-même plus grand ou plus petit qu'un quadrant. La valeur de x tirée de l'équation (1) réduit l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $-\frac{\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin x}{D^2}$, en désignant par D le dénominateur de y. Il y a donc maximum : d'ailleurs il est visible que l'aire ACB, qui devient nulle quand le som-

met C est en D ou en E, doit passer par un maximum dans l'intervalle.

L'équation (1) fait voir que l'arc $\frac{b+a}{2}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont $\frac{b-a}{2}$ et $(\pi - x)$; si donc on prend le milieu I de l'arc AB, et que l'on construise sur le côté AI un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse IG égale DI, le côté AG sera égal à $\pi - x$. On portera cet arc en EC à partir du point E, et ACB sera le triangle demandé.

Si $a + b = \pi$, on a $\cos x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$; les deux points A et B sont alors équidistants des extrémités D et E; le triangle devient isocèle, et son sommet est au milieu de l'arc ED.

Nous avons négligé la valeur de x qu'on tirerait de l'équation $\frac{dy}{dx} = \infty$, parce que cette valeur réduisant à zéro le dénominateur de tang $\frac{1}{2}$S, on verrait, comme dans le problème précédent, qu'elle ne fournit pas un maximum pour l'aire du triangle considéré.

6. *Parmi tous les quadrilatères ayant trois côtés donnés, dont deux opposés sont égaux, déterminer celui dont l'aire est un maximum.* (Annales de Gergonne, tome XX.)

Cette question a trait au problème de statique dans lequel on demande quelle doit être la disposition des pieds de l'homme debout, pour que les chances de rupture de l'équilibre soient diminuées le plus possible. On suppose un écartement donné $BC = b$ des talons, et les deux pieds d'égale longueur, $AB = DC = a$ (*fig.* 30). En faisant varier les grandeurs des deux angles B et C que les axes des pieds font avec la droite qui joint les talons, l'aire S du quadrilatère ABCD variera, et la question consistera à dé-

terminer les valeurs de ces angles pour que l'aire soit maximum.

On trouve successivement

$$S = -\tfrac{1}{2}a(a + BE + CE)\sin(B + C)$$
$$= \tfrac{1}{2}ab(\sin B + \sin C) - \tfrac{1}{2}a^2\sin(B + C);$$

en égalant à zéro les dérivées partielles $\frac{dS}{dB}$, $\frac{dS}{dC}$, on a les deux équations propres à déterminer B et C. On en tire

$$B = C = \text{arc}\cos\frac{b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}.$$

Le quadrilatère sera donc un trapèze isocèle, ou, pour revenir au problème d'équilibre, l'homme devra diriger ses pieds également en dehors. Si l'on suppose $a = b$, on aura $B = 120°$, et si $b = 0$, on aura $B = 135°$; le trapèze se réduit alors à un triangle rectangle. Si b croît à partir de zéro, l'angle E formé par les axes des pieds décroît à partir de 90 degrés, et s'approche indéfiniment de zéro, sans jamais atteindre cette limite.

7. *n points* A, A', A'',... *étant donnés sur un plan, déterminer un point m, tel que la somme des distances* $(mA + mA' + mA'' + \ldots)$ *soit un minimum.*

Si l'on rapporte tous ces points à deux axes rectangulaires tracés à volonté dans le plan, et qu'on égale à zéro les deux dérivées partielles de la somme proposée, par rapport aux coordonnées du point cherché, on reconnaît que *la somme des cosinus des angles formés par les droites* mA, mA', mA'',... *avec un même axe quelconque, doit être nulle.*

Cette proposition fournira autant d'équations qu'il y a d'angles autour du point cherché, en prenant successivement pour axe chacune des droites mA, mA', mA'',.... L'angle que forme chaque droite avec elle-même étant zéro,

il faudra que la somme des cosinus des angles que les autres forment avec elle soit égale à -1.

Dans le cas de trois points A, A', A'', on trouve ainsi que les trois angles AmA', AmA'', $A'mA''$ sont égaux; et, par suite, leur valeur commune est de 120°, ce qui conduit à la construction connue.

Dans le cas de quatre points A, A', A'', A''', on trouve que les angles opposés au sommet sont égaux; ce qui conduit au point d'intersection des diagonales du quadrilatère $AA'A''A'''$, etc.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES A LA DÉTERMINATION DE DIVERSES COURBES PLANES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

---

1. *Déterminer,* 1°. *une courbe plane telle, que les tangentes menées aux deux extrémités d'une corde quelconque, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde, se rencontrent en un même point;*

2°. *Une surface telle, que les plans tangents menés aux deux extrémités d'une corde quelconque, et le plan perpendiculaire au milieu de cette corde, se coupent suivant la même droite.*

1°. De ce que le point de concours des tangentes AT, mT (*fig.* 31) doit être situé sur la perpendiculaire élevée au milieu I de la corde Am, on conclut que les deux angles mAT, AmT doivent être égaux, et réciproquement.

Or, si l'on pose

$$mAT = \theta, \quad Am = r, \quad \text{on a} \quad \text{tang}\, AmT = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \text{tang}\,\theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$r = A\sin\theta, \quad \text{A étant une constante arbitraire.}$$

C'est l'équation d'uu cercle dont le rayon est $\frac{A}{2}$, et le centre sur la normale Ay.

Il a suffi d'écrire que l'angle d'une tangente quelconque

avec la corde issue d'un point fixe A, était égal à l'angle que la tangente fixe AT fait avec cette même corde; et puisque la courbe obtenue est un cercle, on voit, à posteriori, que la même égalité d'angles aura lieu pour toute corde non issue de l'origine A.

2°. Soient ABC, mBC (*fig.* 32) deux plans tangents de la surface cherchée, Am la corde de contact. Suivant cette corde, conduisons un plan quelconque AmD; il déterminera, dans la surface, une section dont les tangentes en A et m seront les traces AD, mD du plan sécant sur les deux plans tangents; et, puisque le plan passant par le milieu I de la corde Am et par la droite BC, doit être perpendiculaire sur Am, la droite DI, comprise dans ce plan, sera perpendiculaire sur cette même corde. La condition de la première partie de l'énoncé est donc remplie par la section AmD; conséquemment, cette section sera un cercle. La surface cherchée étant coupée suivant un cercle par tout plan passant par le point A, n'est autre qu'une sphère dont le centre est sur la normale Az et le rayon arbitraire.

Soient $Am = r$, $mAD = \theta$, et supposons que le plan sécant passe par la normale Az; on aura (1°)

$$r = A \sin\theta, \quad \text{or} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin\theta = \frac{z}{r};$$

et, conséquemment,

$$x^2 + y^2 + z^2 - Az = 0$$

sera l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires.

2. *Déterminer une courbe plane telle, que le rayon vecteur issu d'un point fixe soit proportionnel au cube de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente à l'extrémité du rayon vecteur.*

En désignant par r le rayon vecteur, par θ l'angle qu'il fait avec un axe fixe, par $\frac{1}{c^2}$ le rapport constant, on a

l'équation

$$\left(\frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}\right)^3 = c^2 r,$$

qu'on intègre facilement en posant $r^{-\frac{2}{3}} = z$.

L'intégrale est

$$\left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\cos \frac{2}{3} \theta}.$$

Cette courbe est telle, que l'*angle* θ *formé par le rayon vecteur om* (fig. 33) *avec l'axe polaire, est triple de l'angle formé par la perpendiculaire* oP *avec le même axe,* propriété qui aurait pu servir à sa définition.

En effet, soit $mo\mathrm{P} = m\theta$; on aura $o\mathrm{P} = r \cos m\theta$ et $\overline{o\mathrm{P}}^3 = c^2 r$, d'où

$$\left(\frac{r}{c}\right)^2 = \frac{1}{\cos^3 m\theta}.$$

Or l'intégrale donne

$$\left(\frac{r}{c}\right)^2 = \frac{1}{\cos^3 \frac{2}{3} \theta};$$

donc

$$m = \tfrac{2}{3}, \quad \text{et, par suite,} \quad \mathrm{P}ox = \tfrac{1}{3}\theta.$$

Une autre propriété de la même courbe, c'est qu'*elle est l'enveloppe des positions que prend la perpendiculaire au rayon vecteur issu du centre d'une hyperbole équilatère dont le demi-axe est égal à c, lorsque ce rayon décrit l'hyperbole.*

En effet, soit mQ (*fig.* 34) la perpendiculaire au rayon om; désignons om par p, l'angle $m\mathrm{Q}x$ par α; par r et θ les coordonnées d'un point quelconque de la perpendiculaire mQ; son équation est

$$r = \frac{\pm p}{\sin(\theta - \alpha)},$$

et le point m étant sur l'hyperbole, on a

$$p^2 = \frac{-c^2}{\cos 2\alpha};$$

éliminant p entre ces deux équations, il vient

$$r^2 = \frac{-c^2}{\cos 2\alpha \sin^2(\theta - \alpha)}.$$

Pour avoir l'enveloppe, il faut égaler à zéro la dérivée de cette équation relative à α, ce qui donne simplement

$$\cos(3\alpha - \theta) = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{2};$$

puis substituer cette valeur de α dans l'équation de la ligne mobile : on retrouve ainsi l'intégrale déjà obtenue.

C. Q. F. D.

3. *Déterminer une courbe plane telle, que l'on ait, pour tout point* (x, y) *de cette courbe, la relation*

$$(1) \qquad \left(\frac{N}{y}\right)^3 = \frac{2\rho}{x}\left(\frac{S_n}{y} - \frac{y}{x}\right),$$

N désignant la longueur de la normale terminée à l'axe des x, S_n la sous-normale, ρ le rayon de courbure.

En remplaçant ces longueurs par leurs expressions analytiques, la condition de l'énoncé devient

$$(2) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \pm 2\left(x\frac{dy}{dx} - y\right).$$

Le signe + convient aux courbes convexes vers l'axe des x, le signe — aux courbes concaves.

Le moyen le plus simple d'intégrer cette équation linéaire consiste à lui appliquer la méthode qui convient aux équations de la forme

$$(ax+b)^m\frac{d^my}{dx^m} + A(ax+b)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + ky = 0.$$

Prenons d'abord le signe $+$, et posons $y = x^h$, h étant une indéterminée; le facteur x^h, commun à tous les termes de l'équation (2), disparaît, et il reste

$$h^2 - 3h + 2 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = 1, \quad h = 2.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$y = ax + bx^2,$$

a et b étant des constantes arbitraires.

Cette équation représente des *paraboles passant par l'origine*, et dont *l'axe principal est parallèle à l'axe des* y.

Pour que ces paraboles soient convexes vers l'axe des x, il faut et il suffit que la constante b reçoive des valeurs positives. Si on lui attribuait des valeurs négatives, on aurait des paraboles concaves vers l'axe des x, qui satisferaient bien à l'équation différentielle (2) dans laquelle on prend le signe $+$, mais non pas à la condition de l'énoncé telle qu'elle a été posée dans l'équation (1). Ces paraboles répondraient à la condition

$$(1') \qquad \left(\frac{N}{y}\right)^3 = \frac{2\rho}{x}\left(\frac{y}{x} - \frac{S_n}{y}\right).$$

Si l'on prend le signe $-$ dans l'équation (1), la même transformation conduit à l'équation

$$h^2 + h - 2 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = 1, \quad h = -2.$$

L'intégrale est

$$y = ax - \frac{b}{x^2}.$$

Elle représente, pour des valeurs positives du paramètre b, des courbes concaves vers l'axe des x, et pour des valeurs négatives de b, des courbes convexes qui ne satisferont pas à la condition (1), mais à la condition (1'). Ces courbes présentent une branche infinie qui a pour asymptotes l'axe des y et la droite $y = ax$.

L'équation (2) aurait encore pu être intégrée à la manière des équations homogènes en posant $y = e^{\int u\,dx}$; on la ramènerait ainsi à *l'équation d'Euler*

$$\frac{du}{dy} + u^2 \pm \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}u\right) = 0.$$

Une intégrale particulière de cette équation est $u = \frac{1}{x}$, et l'on en conclut l'intégrale générale en posant $u = \frac{1}{x} + z$.

Enfin, on intégrerait encore l'équation (2) en posant $y = xz$, ce qui la réduirait, dans le cas du signe $+$, à

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad z = ax + b,$$

et, dans le cas du signe $-$, à

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{c}{x^3} + c'.$$

4. *Déterminer une courbe plane telle, que l'on ait, entre les angles* α *et* β *que forment le rayon vecteur om* (fig. 35) *et la tangente* mT *avec une droite fixe* oTx, *la relation*

$$2\beta - 4\alpha = \pi.$$

On en tire $\tan\beta = -\cot 2\alpha$,

d'où $\tan\alpha = \tan\beta \pm \sqrt{1 + \tan^2\beta}$.

Or, $\tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad \tan\beta = \frac{dy}{dx}.$

On a donc à intégrer l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy = \pm x\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$y - px = \pm x\sqrt{1 + p^2}.$$

L'intégrale est

$$y^2 + x^2 - 2cx = 0,$$

c étant une constante arbitraire. Ainsi la courbe cherchée est un cercle de rayon quelconque passant par le point o et ayant son centre sur l'axe ox. La géométrie rend aisément compte de cette propriété du cercle.

5. *Si une courbe* AB (fig. 36) *est telle, qu'en menant d'un point quelconque* m, *une normale* mS *jusqu'à la droite* Ax, *et du pied de cette normale une ordonnée* Sp, *on ait*

$$\overline{Sp}^2 - \overline{Sm}^2 = \text{const.},$$

les sous-normales successives PS, ST, TU,..., *seront égales entre elles, et réciproquement.*

Soient (x, y), (x', y'), les coordonnées des deux points m, p, rapportées à deux axes rectangulaires dont l'un est la ligne Ax; on a, d'après l'énoncé,

$$y'^2 = y^2\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 + \text{const.},$$

et

$$x' = x + y\frac{dy}{dx};$$

y' est une fonction de x', déterminée par l'équation de la courbe, et, par conséquent, une fonction implicite de x : on aura donc, en différentiant par rapport à x les deux équations précédentes,

$$y'\frac{dy'}{dx'}\frac{dx'}{dx} = y\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right],$$
$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Substituant dans la première, à la place de $\frac{dx'}{dx}$, sa valeur

tirée de la deuxième, il vient

$$\left(y' \frac{dy'}{dx'} - y \frac{dy}{dx}\right)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + y \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Si l'on n'a pas

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

on conclut de cette équation

$$y' \frac{dy'}{dx'} = y \frac{dy}{dx};$$

c'est-à-dire PS = ST, C. Q. F. D.

Voyons maintenant ce que signifie l'équation

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Son premier membre représente $\frac{dx'}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}\left(x + y \frac{dy}{dx}\right)$; on aurait donc

$$x + y \frac{dy}{dx} = c, \quad c \text{ étant une constante},$$

ou
$$y dy + (x - c)\, dx = 0,$$

et finalement
$$y^2 + (x - c)^2 = k^2;$$

équation d'un cercle dont le centre n'est autre que le point S de l'axe ox, puisque c représente aussi la valeur constante de $x' = o$S. Bien que ce cercle remplisse la condition de l'énoncé, en ce sens que la différence entre la normale mS et l'ordonnée (ou rayon) Sp est constamment nulle, cependant le théorème dont il s'agit ne lui est point applicable, puisque les sous-normales, à la suite de PS, sont toutes nulles. L'analyse précédente est d'ailleurs en défaut dans ce cas, puisque x' étant constante, l'on ne peut plus regarder y' comme fonction implicite de x.

Réciproquement, si l'on suppose qu'à partir d'une ordonnée mP, les sous-normales successives PS, ST,... soient

égales entre elles, on aura

$$y' \frac{dy'}{dx'} = y \frac{dy}{dx},$$

et, multipliant de part et d'autre par $dx' = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)$,

$$y'\,dy' = y\frac{dy}{dx}\,d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = y\,dy + y\frac{dy}{dx}d\,.\,y\frac{dy}{dx}.$$

Les deux membres sont des différentielles exactes relatives à x; donc

$$y'^2 = y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2} + \text{const.},$$

ou

$$\overline{Sp}^2 = \overline{Sm}^2 + \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Il faut remarquer que ce théorème ne suppose pas *que la sous-normale* $y\frac{dy}{dx}$ *ait partout une valeur constante.* Si l'on part d'un autre point que m, on aura une nouvelle série de sous-normales *égales entre elles*, mais qui pourront être *différentes des premières.*

Si l'on ajoutait cette condition nouvelle, que la sous-normale fût constante, ou

$$y\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{on en conclurait} \quad y^2 = 2px + q.$$

La courbe AmB serait alors une *parabole ayant pour axe la droite* Ax. Dans ce cas, on aurait non-seulement $\overline{Sp}^2 - \overline{Sm}^2 = \text{const.}$, mais encore $\overline{Sm}^2 - \overline{mP}^2 = \text{const.}$; et, de plus, les *deux constantes seraient égales* au carré de la sous-normale p^2, en sorte que les *carrés des ordonnées et des normales successives*

$$\overline{mP}^2,\quad \overline{mS}^2,\quad \overline{Sp}^2,\quad \overline{pT}^2,\quad \overline{Tq}^2, \ldots,$$

formeraient une progression arithmétique ayant pour raison le carré de la sous-normale.

CHAPITRE X.

APPLICATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES A LA DÉTERMINATION DE DIVERSES SURFACES SATISFAISANT A DES CONDITIONS DONNÉES.

1. *Déterminer la surface telle, que si, d'un point donné o, on mène une perpendiculaire* oA *sur un de ses plans tangents, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la normale* mN *terminée à un plan fixe* xoy *mené par le point donné, soit équivalent au carré de la distance om du point donné au point de contact* (fig. 37).

La condition du problème est

$$(1) \qquad oA \times mN = \overline{om}^2.$$

Désignons par x, y, z les coordonnées du point de contact m, par p, q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$; on a

$$oA = \frac{\pm(z - px - qy)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad mN = \frac{mP}{\cos PmN} = \pm z\sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

$$\overline{om}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\pm z(z - px - qy) = x^2 + y^2 + z^2;$$

comme le second membre est essentiellement positif, on devra prendre, dans le premier, le signe + ou le signe —, selon que les deux facteurs (z et $z - px - qy$) seront de même signe ou de signes contraires; or le facteur ($z - px - qy$) représente l'ordonnée oB du point où le plan tangent rencontre l'axe des z. De là, deux cas à distinguer :

1°. *Les points m et B étant d'un même côté du plan fixe,* on a l'équation $z(z - px - qy) = x^2 + y^2 + z^2$,

ou

$$xzp + yzq = -(x^2 + y^2).$$

Cette équation aux différences partielles du premier ordre, a pour intégrale

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

elle représente une surface symétrique par rapport au plan fixe, dont la propriété caractéristique est que, toute section plane passant par l'axe perpendiculaire à ce plan, est un cercle. Ce cercle a son centre au point o, et son rayon est une fonction arbitraire de l'azimut.

On retrouve les mêmes résultats, sans calcul intégral, par le raisonnement suivant :

La similitude des triangles oAB, mPN, donne

$$oA \,.\, mN = oB \,.\, mP;$$

par conséquent, la condition de l'énoncé équivaut à

$$oB \,.\, mP = \overline{om}^2,$$

ou bien, si l'on mène la perpendiculaire mI sur oZ, on doit avoir

$$oB \,.\, oI = \overline{om}^2.$$

Donc le triangle omB est rectangle en m; mais la droite mB, qui est à la fois dans le plan ZoP et dans le plan tangent, est tangente à la section produite par le plan ZoP dans la surface chérchée; donc cette section est un cercle de rayon om. En désignant par R ce rayon et par θ l'angle Pox, l'équation de la surface sera de la forme

$$R = \varphi(\theta).$$

2°. *Les points m et* B *étant de côtés différents du plan fixe,* on a l'équation $z(px + qy - z) = (x^2 + y^2 + z^2)$, ou

$$xzp + yzq = 2z^2 + x^2 + y^2,$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^4 \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

elle représente une surface symétrique par rapport au plan fixe. Les rayons vecteurs d'une section plane passant par l'axe perpendiculaire à ce plan, sont proportionnels aux carrés de leurs projections sur un axe fixe quelconque tracé dans ce même plan.

Si l'on demandait que le rectangle $(o\mathrm{A} \,.\, m\mathrm{N})$ fût équivalent à un carré donné, on trouverait pour intégrale

$$z^2 \pm n^2 = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

En prenant pour $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ une fonction entière du premier ou du deuxième degré, cette équation, qu'on discutera facilement, repésentera des surfaces du deuxième ordre.

2. *Étant donnée l'équation d'une surface,*

$$z = f(x, y),$$

on propose de déterminer l'équation d'une autre surface, rapportée au même système de coordonnées rectangulaires, telle qu'un prisme droit dont les arêtes sont parallèles à l'axe des z, intercepte sur ces surfaces deux portions équivalentes.

Soient

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

l'équation différentielle de la première surface;

$$dz = r\,dx + s\,dy,$$

l'équation différentielle de la seconde.

Les éléments des deux surfaces, projetés sur le rectangle $dx\,dy$, ont pour expression

$$dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad dx\,dy\sqrt{1 + r^2 + s^2}.$$

Par conséquent, les fonctions inconnues r et s devront satisfaire à la condition

$$(1) \qquad r^2 + s^2 = p^2 + q^2,$$

à laquelle il faut joindre

$$(2) \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}.$$

Ces deux équations détermineront, dans chaque cas particulier, les fonctions r et s, et, par suite, z en fonction de x et de y.

1°. *Cas où la surface donnée est plane.*

Soit $z = a + mx + ny$ l'équation de ce plan; on aura $p = m$, $q = n$, et en posant $m^2 + n^2 = \alpha^2$, α désignera la tangente trigonométrique de l'inclinaison du plan donné sur le plan des xy; l'équation (1) deviendra

$$r^2 + s^2 = \alpha^2, \quad \text{d'où} \quad r\frac{dr}{dx} + s\frac{ds}{dx} = 0,$$

et, en ayant égard à l'équation (2),

$$r\frac{dr}{dx} + \sqrt{\alpha^2 - r^2}\,\frac{dr}{dy} = 0,$$

équation aux différences partielles, linéaire et du premier ordre, dont l'intégrale est

$$\frac{x}{r} - \frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}} = \varphi(r).$$

La fonction φ étant arbitraire, on peut encore écrire cette intégrale sous la forme

$$sx - ry = \varphi(r).$$

En y joignant $r^2 + s^2 = \alpha^2$, on a deux équations finies propres à déterminer r et s en fonction de x et y, après que l'on aura disposé de la fonction arbitraire. Le problème admet donc une infinité de solutions.

Comme cas particulier, soit $\varphi(r) = 0$; on tire des équa-

tions précédentes

$$r = \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad s = \frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

et

$$z = \alpha \int \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha\sqrt{x^2+y^3} + \text{const.}$$

C'est l'équation d'un cône de révolution autour de l'axe des z, dont l'arête fait avec le plan des xy le même angle que le plan donné. Si l'on remarque que chaque élément superficiel du cône se confond avec le plan tangent, lequel est partout également incliné sur le plan des xy, on se rendra compte aisément du résultat précédent.

Autre solution. Si l'on pose avec Euler

$$r = \alpha \cos\omega, \quad s = \alpha \sin\omega,$$

l'équation (1) sera satisfaite identiquement, et la question sera ramenée à déterminer pour ω une fonction de x et y, telle que l'on ait

$$\frac{d.\cos\omega}{dy} = \frac{d.\sin\omega}{dx},$$

ou

$$\sin\omega\frac{d\omega}{dy} + \cos\omega\frac{d\omega}{dx} = 0.$$

L'intégration donne

$$x\sin\omega - y\cos\omega = \varphi(\omega).$$

Cette équation fournira pour ω une infinité de fonctions de x et y. Les valeurs correspondantes de z se tireront de l'équation

$$dz = \alpha(\cos\omega\,dx + \sin\omega\,dy),$$

qui, intégrée par parties, donne

$$z = \alpha(x\cos\omega + y\sin\omega) + \alpha\int\varphi(\omega)\,d\omega + \text{const.}$$

Examinons quelques cas particuliers.

1°. Soit $\omega = \text{const.} = \beta$;

la fonction φ disparaît de l'expression de z, et l'on a immé-

diatement

$$z = \alpha(x\cos\beta + y\sin\beta) + \text{const.},$$

équation d'un plan incliné sur le plan des xy, de la même quantité que le plan donné.

2°. Soit $$\varphi(\omega) = 0,$$
d'où $$x\sin\omega - y\cos\omega = 0,$$
on en tire $\sin\omega$ et $\cos\omega$ que l'on substitue dans l'expression de z; il vient

$$z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} + \text{const.}$$

C'est le cône droit déjà trouvé.

3°. Soit $$\varphi(\omega) = a\sin\omega - b\cos\omega,$$
d'où $$(x-a)\sin\omega - (y-b)\cos\omega = 0,$$
et $$z = \alpha[(x-a)\cos\omega + (y-b)\sin\omega] + \text{const.},$$
ou enfin $$z = \alpha\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \text{const.}$$

Cette équation représente encore un cône de révolution dont les arêtes font le même angle que dans le cas précédent, avec le plan des xy; seulement l'axe est parallèle à l'axe des z, au lieu de coïncider avec lui.

Les différentes hypothèses que nous venons de faire sur la fonction φ sont les seules qui puissent conduire à des surfaces coniques (le plan étant compris parmi ces surfaces).

En effet, puisqu'on a posé

$$r = \alpha\cos\omega,\quad s = \alpha\sin\omega,$$

l'expression générale de z peut s'écrire sous la forme

$$z = rx + sy + \alpha\int\varphi(\omega)\,d\omega + \text{const.}$$

Or l'équation aux différences partielles des surfaces coniques est

$$z - c = r(x-a) + s(y-b).$$

Ainsi, pour que l'équation précédente se réduise à cette

forme, il faut que $\int \varphi(\omega)\, d\omega$ soit nulle ou égale à

$$-\frac{(ar+bs)}{\alpha} = -(a\cos\omega + b\sin\omega);$$

d'où l'on conclut que l'une des trois hypothèses suivantes doit avoir lieu :

$$\omega = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \varphi(\omega) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(\omega) = a\sin\omega - b\cos\omega.$$

2°. *Cas où la surface donnée est de révolution autour de l'axe des z.*

Prenons, comme exemple, *le paraboloïde de révolution*

$$z = \frac{x^2+y^2}{2a}.$$

On a

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{a}.$$

Soit

$$a\,dz = r\,dx + s\,dy$$

l'équation différentielle de la surface cherchée, on doit avoir

$$r^2 + s^2 = x^2 + y^2.$$

En différentiant par rapport à x, et ayant égard à l'équation (2), il vient

$$r\frac{dr}{dx} + \sqrt{x^2+y^2-r^2}\cdot\frac{dr}{dy} = x.$$

L'intégrale de cette équation aux différences partielles est

$$\frac{y+\sqrt{y^2+x^2-r^2}}{x+r} = \varphi(r^2-x^2).$$

Quand on aura fait choix d'une fonction φ, on en tirera la valeur de la fonction r, et, par suite, on connaîtra s; mais le calcul est plus simple en introduisant, comme précédemment, une fonction angulaire ω.

Posons $\quad r = x\cos\omega + y\sin\omega, \quad s = x\sin\omega - y\cos\omega.$

Il en résulte identiquement $r^2+s^2 = x^2+y^2$; en sorte que la question est ramenée à déterminer pour ω une fonc-

tion telle que $r\,dx + s\,dy$, c'est-à-dire

$$(x\cos\omega + y\sin\omega)\,dx + (x\sin\omega - y\cos\omega)\,dy$$

soit une différentielle exacte. En développant cette condition, on est conduit à une équation aux différences partielles, qui s'intègre sans difficulté. Cette intégrale est

$$2xy\cos\omega - (x^2 - y^2)\sin\omega = \varphi(\omega).$$

Elle fournira une infinité de valeurs de ω.

L'équation des surfaces demandées sera de la forme

$$2az = (x^2 - y^2)\cos\omega + 2xy\sin\omega - \int\varphi(\omega)\,d\omega,$$

où l'on remplacera ω par la valeur tirée de l'intégrale précédente. Si l'on suppose

$$\omega = \text{const.} = \beta,$$

on n'a point à recourir à l'équation intégrale; car la condition d'intégrabilité de $r\,dx + s\,dy$ est alors remplie d'elle-même. Il vient

$$2az = (x^2 - y^2)\cos\beta + 2xy\sin\beta.$$

Quelle que soit la constante β, cette équation représente des *paraboloïdes hyperboliques*. En particulier, si

$$\beta = 0, \quad \text{on a} \quad 2az = x^2 - y^2,$$

et si

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{on a} \quad az = xy.$$

Cette dernière équation se ramène à la précédente par une transformation de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta, \end{array} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\right\},$$

par conséquent, elles appartiennent à un même paraboloïde, dans lequel les deux paraboles principales ont même paramètre $2a$, et leur axe principal dirigé suivant l'axe des z.

CHAPITRE XI.

EXERCICES D'INTÉGRATION. — QUESTIONS DIVERSES.

I. *Sur la transformation des intégrales doubles.*

1. *Étant donnée la formule*

$$U = \int\int dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

qui exprime l'aire d'une surface quelconque, on propose d'en déduire la formule

$$U = 2\pi \int R\, ds,$$

qui convient au cas où la surface est de révolution.

Soient oZ l'axe de révolution (*fig.* 38), AmB une section méridienne, $R = oP$ la projection du rayon vecteur om sur le plan des xy; R sera aussi le rayon du parallèle qui passe par le point m, et l'on aura

$$R = \sqrt{x^2 + y^2},\quad z = \varphi(R),\quad ds = \sqrt{dR^2 + dz^2} = dR\sqrt{1 + \varphi'(R)},$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \varphi'(R)\frac{x}{R},\quad q = \frac{dz}{dy} = \varphi'(R)\frac{y}{R}.$$

Par suite, la formule donnée devient d'abord

$$U = \int\int dx\, dy \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}.$$

Remplaçons les coordonnées rectangulaires x, y par les coordonnées polaires R et $\theta = Poy$; on sait, par la théorie du changement des variables indépendantes sous le signe $\int\int$, que l'élément $dxdy$ devra être remplacé par $R dR d\theta$, et l'on aura

$$U = \int\int R\, dR \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}.\, d\theta.$$

L'intégration relative à θ s'effectue immédiatement, et

pour obtenir la surface entière, il faut intégrer depuis $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, ce qui donne

$$U = 2\pi \int R\,dR \sqrt{1 + \varphi'(R)^2} = 2\pi \int R\,ds.$$

C'est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir.

2. *Étant donnée la formule*

$$V = \int\int (z - z')\,dx\,dy,$$

qui exprime le volume d'un solide cylindrique compris entre le plan des xy et une surface quelconque, on propose d'en déduire la formule

$$V = \pi \int R^2\,dz,$$

qui convient au cas où le volume est de révolution autour de l'axe des z.

En introduisant comme ci-dessus les coordonnées polaires R et θ, la formule donnée prend la forme

$$V = \int\int (z - z')\,R\,dR\,d\theta.$$

z et z' sont les deux ordonnées mP, m'P qui répondent à une même valeur du rayon R, et comme elles sont indépendantes de l'azimut θ, on peut intégrer immédiatement par rapport à cette variable; il vient, eu égard aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$,

$$\text{(A)} \qquad V = 2\pi \int (z - z')\,R\,dR.$$

Cette expression de V, bien que réduite à une intégrale simple, diffère cependant de la formule

$$\text{(B)} \qquad V = \pi \int R^2\,dz.$$

Cette différence tient à ce qu'elles répondent à deux modes distincts de décomposition d'un même volume en éléments infiniment petits. Tandis que la formule (B) suppose le volume décomposé en tranches cylindriques par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, il est aisé de s'assurer que la formule (A) suppose le même volume dé-

composé en anneaux cylindriques, parallèles à l'axe. En effet, deux cylindres ayant pour axe oz, pour bases les cercles de rayon R, $R + dR$, et même hauteur $(z - z')$, comprendront entre eux une portion infiniment petite du volume, dont la mesure sera $2\pi (z - z') R dR$ (en négligeant les infiniment petits du second ordre).

La formule (A) peut se ramener à (B) par le procédé de l'intégration par parties, qui a précisément pour effet de changer le mode de décomposition d'une intégrale en remplaçant une somme d'éléments par une somme équivalente; il vient, en effet,

$$V = 2\pi \int (z - z') R dR = \pi R^2 (z - z') - \pi \int R^2 dz + \pi \int R^2 dz'.$$

Les intégrales doivent être prises depuis la limite $R = 0$ pour laquelle on a $z = oB$, $z' = oA$, jusqu'à la limite $R = IH$, qui répond au point où l'ordonnée z est tangente à la méridienne AmB, et alors la différence $(z - z')$ se réduit à zéro. Donc le terme $\pi R^2 (z - z')$ s'évanouit aux deux limites, et si l'on pose, pour abréger ($oA = \alpha$, $oB = \beta$, $KH = \gamma$), l'intégrale $\int R^2 dz$, qui se rapporte à la partie du volume située au-dessus du parallèle IH, devra être prise entre les limites β et γ, tandis que l'autre $\int R^2 dz'$, qui correspond à la partie du volume situé au-dessous de ce parallèle, devra être prise de $z' = \alpha$ à $z' = \gamma$. L'équation précédente se réduira donc à

$$V = \pi \int_\alpha^\gamma R^2 dz' - \pi \int_\beta^\gamma R^2 dz = \pi \left(\int_\alpha^\gamma R^2 dz' + \int_\gamma^\beta R^2 dz \right).$$

Enfin les deux dernières intégrales peuvent être réunies en une seule $\int_\alpha^\beta R^2 dz$, et l'on a définitivement

$$V = \pi \int_\alpha^\beta R^2 dz. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

11.

coefficient de z^2 dans l'exponentielle. Soit donc $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{m}$, il vient

$$y = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{m^2 \cot^2\theta}{2}}}{m \sin\theta} \int_{m\sqrt{a+\frac{\cot^2\theta}{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz.$$

Dans le cas où la constante a serait égale à $-\frac{\cot^2\theta}{2}$, la limite inférieure de l'intégrale devenant zéro, on aurait

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, par suite, l'intégrale cherchée serait immédiatement connue sous forme finie,

$$y = \frac{e^{\frac{m^2 \cot^2\theta}{2}}}{m \sin\theta} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit, en général, $m\sqrt{a + \frac{\cot^2\theta}{2}} = \alpha$: on ne connaît pas sous forme finie l'intégrale $\int_\alpha^\infty e^{-z^2}\, dz$; mais on peut la développer en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de α. On a d'abord

$$\int_\alpha^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz - \int_0^\alpha e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^\alpha e^{-z^2} dz.$$

Or $$e^{-z^2} = 1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1.2} - \frac{z^6}{1.2.3} + \ldots.$$

Intégrant, on aura

$$\int_0^\alpha e^{-z^2} dz = \alpha - \frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\alpha^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\alpha^7}{7} \ldots \pm \frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}\ldots$$

Cette série est convergente, quel que soit α, et comme ses

termes sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme de rang quelconque est de signe contraire à ce terme et une fraction du terme suivant.

L'intégration par parties fournit un autre développement en série convergente de la même intégrale,

$$\int_0^\alpha e^{-z^2}\,dz = e^{-\alpha^2}\,\alpha\left[1+\frac{2\alpha^2}{1.3}+\frac{(2\alpha^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2\alpha^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots\right].$$

Lorsque α^2 est égal ou supérieur à 2, les séries précédentes ne sont pas d'une convergence assez rapide pour être commodément employées. Laplace, dans sa théorie des réfractions astronomiques (*), a donné, pour le cas dont il s'agit, un développement de l'intégrale sous forme de fraction continue. A cet effet, il part d'une troisième série,

$$\int_\alpha^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}\left(1-\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{1.3}{2^2.\alpha^4}-\frac{1.3.5}{2^3.\alpha^6}+\ldots\right),$$

qu'on obtient aisément par les transformations suivantes :

$$\int_\alpha^\infty e^{-z^2}\,dz = \int_\alpha^\infty e^{-z^2}\,zdz\cdot\frac{1}{z} = \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\infty e^{-z^2}\cdot z^{-2}\,dz,$$

. . . .

$$\int_\alpha^\infty e^{-z^2}z^{-p}\,dz = \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha^{p+1}}-\frac{p+1}{2}\int_\alpha^\infty e^{-z^2}z^{-(p+2)}\,dz;$$

mais, comme le rapport d'un terme au précédent $\left(\frac{2n+1}{2\alpha^2}\right)$, loin de converger vers une limite plus petite que 1 pour des valeurs croissantes de n, croît jusqu'à l'infini, cette série est divergente; il vaudrait mieux, pour la rigueur.

(*) *Mécanique céleste*, tome IV, page 283.

du raisonnement, n'en pas faire usage. Voici comment M. Jacobi a rectifié le procédé de Laplace :

(Les développements qui suivent sont empruntés à une leçon de M. Liouville, au Collége de France.)

Posons

$$V = e^{\alpha^2} \int_\alpha^\infty e^{-z^2} dz,$$

d'où

$$\frac{dV}{d\alpha} = 2\alpha\, e^{\alpha^2} \int_\alpha^\infty e^{-z^2} dz - 1 = 2\alpha V - 1,$$

. . . .

$$\frac{d^{n+1} V}{d\alpha^n} = 2\alpha \frac{d^n V}{d\alpha^n} + 2n \frac{d^{n-1} V}{d\alpha^{n-1}}.$$

Soit

$$\frac{dV}{d\alpha} = V_1; \quad \text{et, en général,} \quad \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n V}{d\alpha^n} = V_n,$$

on aura

(A) $$V_1 = 2\alpha V - 1,$$

. . . .

(B) $$(n+1) V_{n+1} = 2\alpha V_n + 2 V_{n-1}.$$

Posons, en général, $V_n = (-1)^n \frac{y_{n+1}}{2\alpha^{n+1}}$; l'équation (B) deviendra

$$y_n = y_{n+1} + \frac{n+1}{2\alpha^2} y_{n+2},$$

ou, si l'on pose $q = \frac{1}{2\alpha^2}$, et qu'on divise par y_{n+1},

(B') $$\frac{y_n}{y_{n+1}} = 1 + (n+1) q \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}.$$

Transformons de même l'équation (A). A cet effet, on déduit V_1 et V de l'expression de V_n, en y faisant $n=1$, $n=0$, savoir :

$$V_1 = \frac{-y_2}{2\alpha^2} = -q y_2, \quad V = \frac{y_1}{2\alpha};$$

et, substituant dans (A), on a

$$(\text{A}') \qquad \frac{1}{y_1} = 1 + q\frac{y_2}{y_1}.$$

Actuellement, on tire des équations (A′) et (B′),

$$y_1 = \frac{1}{1+\frac{q}{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}}, \quad \frac{y_1}{y_2} = 1 + \frac{2q}{\left(\frac{y_2}{y_3}\right)}, \quad \frac{y_2}{y_3} = 1 + \frac{3q}{\left(\frac{y_3}{y_4}\right)}, \ldots.$$

Il importe de démontrer que $\frac{y_n}{y_{n+1}}$ restera positif quel que soit n ; pour cela, il suffit de faire voir que y_{n+1} est positif quel que soit n ; et, comme on a

$$y_{n+1} = (-1)^n\, 2\alpha^{n+1}\, \text{V}_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\, 2\alpha^{n+1}\frac{d^n\text{V}}{d\alpha^n},$$

la question revient à prouver que $(-1)^n \frac{d^n\text{V}}{d\alpha^n}$ est positif.

Pour simplifier la recherche de $\frac{d^n\text{V}}{d\alpha^n}$, transformons la fonction V de manière que les limites de l'intégrale soient indépendantes de α. En posant $z = \alpha + z_1$, les limites deviendront 0 et ∞, et l'on aura

$$\text{V} = e^{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 - 2\alpha z_1 - z_1^2}\,dz_1 = \int_0^\infty e^{-2\alpha z_1}\, e^{-z_1^2}\,dz_1,$$

$$\frac{d^n\text{V}}{d\alpha^n} = \int_0^\infty e^{-2\alpha z_1}(-2z_1)^n e^{-z_1^2}\,dz_1 = (-1)^n 2^n \int_0^\infty e^{-2\alpha z_1 - z_1^2}\, z_1^n\,dz_1,$$

et

$$(-1)^n\frac{d^n\text{V}}{d\alpha^n} = 2^n\int_0^\infty e^{-2\alpha z_1 - z_1^2}\, z_1^n\,dz_1,$$

résultat essentiellement positif.

Le développement de l'intégrale proposée en fraction continue se déduit immédiatement de ce qui précède.

On a

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}y_1 = \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}.$$

$$q = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Pour appliquer cette fraction continue au calcul approché de l'intégrale, on formera les réduites successives, qui seront alternativement plus grandes et plus petites que la fraction continue. Il suffira de calculer directement les deux premières réduites $\left(\frac{1}{1} \text{ et } \frac{1}{1+q}\right)$; les suivantes s'en déduiront d'après la loi connue : le numérateur d'une réduite quelconque est égal au numérateur de la réduite précédente, plus, au numérateur de la réduite qui précède de deux rangs multiplié par le numérateur de la fraction intégrante à laquelle on s'arrête. Les dénominateurs se forment d'après la même loi. Ainsi, les cinq premières réduites sont :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1+q}, \quad \frac{1+2q}{1+3q}, \quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2};$$

à partir de la cinquième, le numérateur et le dénominateur d'une réduite de rang quelconque sont des trinômes du second degré en q, dans lesquels le terme indépendant de q est égal à 1.

3. *Parmi les courbes définies par l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

déterminer celles qui coupent à angle droit le cercle dont l'équation est $y^2 + x^2 = r^2$.

L'équation (1) rentre dans la classe des équations de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + F(x) \frac{dy}{dx} + \varphi(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

qu'on intègre immédiatement en les divisant par $\frac{dy}{dx}$; car le premier membre devient une somme de différentielles exactes.

On trouve pour intégrale

$$y^2 = a - \frac{b}{x};$$

puis la seconde condition de l'énoncé fournit, entre les constantes a et b, la relation $b = \frac{2}{3} a \sqrt{r^2 - \frac{a}{3}}$.

Par conséquent, les courbes cherchées sont renfermées dans l'équation

$$y^2 = a - \frac{2\sqrt{3(3r^2 - a)}}{9ax}.$$

4. *Étant donnée l'équation* $F(x, y, a, b) = 0$, *on propose de déterminer la relation qui doit exister entre les paramètres a et b, pour que les courbes représentées par cette équation aient pour enveloppe une courbe donnée dont l'équation est* $\varphi(x, y) = 0$.

La relation cherchée résultera de l'élimination de x et y entre les trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Soit, par exemple, l'équation $y^2 + ax + b = 0$, qui représente une suite de paraboles de même axe, et cherchons la condition pour que ces paraboles aient pour en-

veloppe le cercle $y^2 + x^2 - r^2 = 0$; nous trouverons $b = -\frac{a^2}{4} - r^2$; et, par suite, l'équation des paraboles, réduite à ne plus contenir qu'un seul paramètre arbitraire a, sera

$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0.$$

5. *Déterminer la relation qui existe entre deux fonctions* M *et* N *de* x *et* y, *telles que la quantité*

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{Mx + Ny}$$

soit une différentielle exacte.

L'expression proposée ne renferme que le rapport $\frac{N}{M}$, et l'on doit seulement se proposer de déterminer ce rapport. Soit $\frac{N}{M} = z$; la condition pour que l'expression

$$\frac{dx + z\,dy}{x + zy}$$

soit une différentielle exacte, se réduit à

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0,$$

équation aux différences partielles dont l'intégrale est

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ainsi, les fonctions M et N doivent être telles, que leur rapport soit une simple fonction de $\frac{y}{x}$, ou, ce qui revient au même, une fonction du degré 0 de y et x.

Cette condition est évidemment remplie, si l'on prend pour M et N deux fonctions homogènes du même degré; et, en effet, on sait qu'alors la quantité $\frac{M\,dx + N\,dy}{Mx + Ny}$ est

une différentielle exacte. Mais on voit, de plus, qu'elle le sera encore, si, après avoir pris à volonté la fonction M, on choisit une fonction N qui soit égale au produit $M\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, φ étant une fonction arbitraire. Par exemple, soient

$$M = x^2 - 3x, \quad N = (x^2 - 3x)\frac{y}{x} = xy - 3y;$$

l'expression

$$\frac{(x^2 - 3x)\,dx + (xy - 3y)\,dy}{x^3 - 3x^2 + xy^2 - 3y^2}$$

sera une différentielle exacte.

6. *Intégrer l'équation différentielle*

$$yx^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Cette équation étant homogène par rapport à y et à ses dérivées, on pose $y = e^{\int u\,dx}$; il en résulte une équation du premier ordre entre u et x, qui est vérifiée par la valeur $u = \frac{1}{x}$, et l'on en conclut l'intégrale générale en posant, comme dans l'*équation d'Euler*, $u = \frac{1}{x} + z$, etc. L'intégrale est

$$y^2 = ax + bx^2.$$

7. *Intégrer les deux équations simultanées*

$$(1) \qquad 2axy\frac{dz}{dx} - 2z(ax - b^2)\frac{dy}{dx} + aby = 0,$$

$$(2) \qquad 2(by + bz - ax)\frac{dz}{dx} - 2(ax - b^2)\frac{dy}{dx} + a(y + z - b) = 0.$$

Si l'on élimine $\frac{dy}{dx}$ entre ces équations, il vient

$$(3) \qquad 2(bz - ax)\,dz + a(z - b)\,dx = 0.$$

Cette équation ne contenant que les deux variables z et x, on peut l'intégrer. A cet effet, on la rend homogène par la transformation connue, et l'on trouve l'intégrale

$$ax - z^2 = c(z-b)^2, \tag{4}$$

c étant une constante arbitraire.

Puis, si l'on remplace dans l'équation (1) dx par sa valeur en dz tirée de l'équation (3), il arrive que x disparaît complétement, et il reste

$$y\,dz - (z-b)\,dy = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$\mathrm{K}y = z - b, \tag{5}$$

K étant une constante arbitraire.

Les intégrales (4) et (5) résolvent la question : on peut simplifier la première intégrale à l'aide de la seconde. Soit $c\mathrm{K}^2 = \mathrm{H}$; la constante H remplacera c, et l'on aura

$$\mathrm{H}y^2 + z^2 - ax = 0. \tag{6}$$

Si l'on veut interpréter les équations (5) et (6) géométriquement, on peut dire qu'elles représentent une courbe, intersection d'un paraboloïde et d'un plan parallèle à l'axe du paraboloïde.

8. *Intégrer l'équation aux différences partielles*

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)\frac{dz}{dx}-\left(\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1\right)\frac{dz}{dy}=z\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right).$$

L'intégrale est

$$x^2+y^2+z^2=\varphi\left[z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right].$$

La surface qu'elle représente peut être considérée comme le lieu des intersections des sphères $(x^2+y^2+z^2=a^2)$ avec les cônes du second degré $\left[z=\dfrac{xy}{x+y}\varphi(a^2)\right]$.

9. *Intégrer les deux équations linéaires simultanées*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x - n^2a\cos bt(x\cos bt + y\sin bt) = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y - n^2a\sin bt(x\cos bt + y\sin bt) = 0. \end{aligned}\right.$$

On remplace les variables x et y par deux nouvelles variables u et v, en posant

$$x\cos bt + y\sin bt = u,$$
$$x\sin bt - y\cos bt = v,$$

et l'on parvient à deux équations linéaires à *coefficients constants* en u et v,

$$\frac{d^2u}{dt^2} - [n^2(a-1) + b^2]u + 2b\frac{dv}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2v}{dt^2} - (b^2 - n^2)v - 2b\frac{du}{dt} = 0.$$

On les intègre par la méthode des exponentielles en cherchant une solution de la forme

$$u = ce^{\alpha t}, \quad v = c\mu e^{\alpha t}.$$

La substitution de ces valeurs conduit à deux équations propres à déterminer les deux inconnues α et μ; α dépend d'une équation bicarrée,

$$\alpha^4 + [2b^2 - n^2(a-2)]\alpha^2 - [n^2(a-1) + b^2](n^2 - b^2) = 0.$$

On en tirera quatre valeurs de α égales deux à deux et de signes contraires : à chacune d'elles répondra une valeur de μ fournie par l'équation

$$\mu = \frac{2b\alpha}{\alpha^2 + n^2 - b^2}.$$

On trouvera ainsi quatre couples de valeurs particulières des inconnues u et v dont on fera la somme pour chaque

inconnue, en changeant la constante arbitraire c d'un couple à un autre. Il restera à substituer les valeurs générales de u et v dans les formules

$$x = u \cos bt + v \sin bt,$$
$$y = u \sin bt - v \cos bt,$$

et l'on aura x et y en fonction de t et de quatre constantes arbitraires.

10. *Intégrer les équations simultanées*

(1) $$\frac{dx}{dt} + a \cos \theta = 0,$$

(2) $$\frac{dy}{dt} + a \sin \theta - b = 0,$$

(3) $$y - ct - x \operatorname{tang} \theta = 0,$$

dans lesquelles a, b, c *désignent des constantes données.*

(Les calculs suivants sont détachés du problème de la *ligne de poursuite* résolu par MM. Sturm et Querret dans les *Annales* de Gergonne, tome XIII. Ce problème sera traité dans la troisième partie de cet ouvrage.)

Le plus simple est de chercher d'abord l'expression de θ en fonction de x. A cet effet, on différentie l'équation (3), et l'on remplace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2); il vient

$$b - c = \frac{d.\operatorname{tang}\theta}{dt} = -ax \cos\theta \frac{d.\operatorname{tang}\theta}{dx},$$

d'où, en posant $\frac{c-b}{a} = n$,

$$n\frac{dx}{x} = \cos\theta\, d.\operatorname{tang}\theta = \frac{d.\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta}}.$$

L'intégrale est

$$\operatorname{tang}\theta + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta} = \left(\frac{x}{h}\right)^n.$$

La constante arbitraire h représente la valeur de x correspondante à $\theta = 0$; on tire de l'équation précédente, en multipliant les deux membres par $\tang\theta - \sqrt{1 + \tang^2\theta}$,

$$\tang\theta - \sqrt{1 + \tang^2\theta} = -\left(\frac{h}{x}\right)^n,$$

et ajoutant membre à membre,

$$(4) \qquad \tang\theta = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^n - \left(\frac{h}{x}\right)^n\right];$$

par suite, $\cos\theta = \dfrac{2}{\left(\frac{x}{h}\right)^n + \left(\frac{h}{x}\right)^n}$.

Cette valeur étant substituée dans l'équation (1), il n'y restera que t et x,

$$-2\,adt = \left[\left(\frac{x}{h}\right)^n + \left(\frac{h}{x}\right)^n\right] dx.$$

L'intégrale est

$$C - 2\,at = h\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1}\right].$$

On peut choisir l'origine de t de manière que, pour $x = h$, on ait $t = 0$; cette convention fixe la valeur de la constante C, ou

$$C = h\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right),$$

et, par suite,

$$(5) \qquad \frac{2\,at}{h} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1} - 1\right] - \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1} - 1\right].$$

θ et t étant connus en fonction de x, le problème de calcul intégral est résolu; car on aura, *sans nouvelle intégration*, y en fonction de x à l'aide de l'équation (3), dans laquelle t et $\tang\theta$ seront remplacées par leurs valeurs tirées des intégrales (4) et (5),

$$(6) \qquad \frac{2\,ay}{h} = \frac{a-b}{n+1}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1} - 1\right] + \frac{a+b}{n-1}\left[\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1} - 1\right].$$

Les formules (5) et (6) deviennent illusoires dans le cas particulier où $n = 1$, c'est-à-dire où $c = a + b$. L'expression de dt se réduit alors à

$$-2a\,dt = \left(\frac{x}{h} + \frac{h}{x}\right)dx,$$

et son intégrale n'est plus algébrique ; elle prend la forme

$$(5\ bis) \qquad \frac{2at}{h} = l\left(\frac{h}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 1\right],$$

et, par suite, l'équation (6) sera remplacée par la suivante,

$$(6\ bis) \qquad \frac{2ay}{h} = (a+b)\,l\left(\frac{h}{x}\right) + \frac{a-b}{2}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 1\right].$$

Si l'on regarde y et x comme les coordonnées rectangulaires d'un point, on pourra s'exercer à construire les courbes représentées par les équations (6) et (6 *bis*). En transportant l'origine sur l'axe des y négatives à une distance $\frac{h(na+b)}{a(n^2-1)}$, on fera évanouir le terme constant du second membre, et si l'on pose en outre

$$(7) \qquad u = \frac{h(a-b)}{2a(n+1)}\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}, \qquad v = \frac{h(a+b)}{2a(n-1)}\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1},$$

on aura

$$y = u + v;$$

de sorte qu'après avoir construit les courbes (paraboliques ou hyperboliques) représentées par les équations (7), on n'aura plus qu'à faire la somme algébrique de leurs ordonnées correspondantes à la même valeur de x.

On construira de même l'équation (6 *bis*) à l'aide d'une parabole ordinaire et d'une logarithmique.

11. *Étant donnée une série dont les termes sont fonctions de x, si on les multiplie par dx, et qu'on intègre, il arrive, dans certains cas, que l'on sait déterminer, sous*

forme finie, une fonction égale à la somme de ces intégrales; et, par suite, en différentiant cette fonction, on connaîtra la somme de la série proposée.

Appliquons cette méthode à la sommation de la série

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}+\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent, $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{2^{n+1}}}{\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{1}{2}$, tend, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\frac{1}{4}$; par conséquent, cette série est convergente pour toute valeur de x (à l'exception de celles qui rendraient l'une des tangentes infinies, et qui sont comprises dans la formule $x = 2^{n-1}.\pi$).

Multipliant par dx et intégrant, il vient, en désignant par y la somme inconnue de la série,

$$\int y\,dx = c - \left(\text{l.}\cos\frac{x}{2}+\text{l.}\frac{x}{2^2}+\text{l.}\cos\frac{x}{2^3}+\ldots\right)$$
$$= c - \text{l.}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\right).$$

Or, on trouve aisément

$$(1)\qquad \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots=\frac{\sin x}{x}.$$

Il suffit, pour cela, de multiplier les équations suivantes membre à membre,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$
$$\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}.$$
$$\sin\frac{x}{2^2} = 2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}.$$

Multipliant et réduisant, on a

$$\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n},$$

ou

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\left(\frac{x}{2^n}\right)}\cdot\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n},$$

et pour $n = \infty$, on a la relation (1).

Donc $\int y\,dy = c - \text{l}.\frac{\sin x}{x} = c - \text{l}.\sin x + \text{l}.x.$

Différentions maintenant les deux membres de cette équation, et nous aurons

$$y = \frac{1}{x} - \cot x.$$

Telle est la somme de la série proposée.

Puisque l'on a, identiquement,

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots,$$

on en tire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

On peut, dans cette dernière égalité, faire $x = \pi$, et l'on a cette formule remarquable :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16} + \ldots.$$

TROISIÈME PARTIE.

EXERCICES SUR DIVERS THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

SUR L'ATTRACTION MUTUELLE DES CORPS.

1. *Un point matériel* A *est situé dans le plan d'un anneau circulaire, homogène, d'une épaisseur infiniment petite, dont chaque point l'attire en raison inverse du carré de la distance.* On propose de *déterminer l'attraction totale exercée par l'anneau.*

Soient r le rayon om de l'anneau (*fig.* 39), α la distance oA du point attiré au centre, μ la masse de ce point, u sa distance au point m, θ l'angle moA, ω l'épaisseur constante de l'anneau, ρ sa densité. Les actions exercées par tous les points de l'anneau sur le point A auront évidemment une résultante unique dirigée suivant Ao; et, si l'on désigne par f l'intensité du pouvoir attractif rapporté aux unités de masse et de distance, l'attraction totale exercée sur le point A sera exprimée par

$$A = \mu f \frac{dV}{d\alpha},$$

en posant
$$V = \int \frac{dm}{u};$$
et, comme on a
$$dm = \omega\rho\, r\, d\theta, \quad u = \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2\alpha r \cos\theta},$$
l'expression de V prend la forme
$$V = \omega\rho\, r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2\alpha r \cos\theta}}.$$

Selon que la valeur trouvée pour A sera positive ou négative, le point sera repoussé ou attiré par l'anneau.

L'intégrale précédente n'est pas calculable sous forme finie; mais on peut en obtenir une valeur approchée par un développement en série, et l'on va voir que ce développement met en évidence le changement de sens de l'attraction, lorsque le point A passe de l'extérieur à l'intérieur de l'anneau.

Supposons d'abord le *point attiré extérieur à l'anneau*, ou $\alpha > r$.

Remplaçons, dans le radical, $\cos\theta$ par $\dfrac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$, et mettons en évidence le facteur α; il vient
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2-2\alpha r\cos\theta}} &= \frac{1}{\alpha}\left[1 + \frac{r^2}{\alpha^2} - \frac{r}{\alpha}\left(e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{r}{\alpha}e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{r}{\alpha}e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or, on a
$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\left(1 - \frac{r}{\alpha}e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{\alpha}e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{r^2}{\alpha^2}e^{2\theta\sqrt{-1}} \\ &\quad + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{r^3}{\alpha^3}e^{3\theta\sqrt{-1}} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

série convergente, puisque $\frac{r}{\alpha} < 1$; et il est à remarquer que la convergence aurait encore lieu, si l'on réduisait les différents termes à leurs modules respectifs,

$$1, \frac{1}{2}\frac{r}{\alpha}, \quad \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{\alpha^2}, \quad \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{r^3}{\alpha^3}, \ldots;$$

car le rapport d'un terme au précédent $\left(\frac{2n-1}{2n}\frac{r}{\alpha}\right)$ tend, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\frac{r}{\alpha} < 1$.

On a pareillement,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1 - \frac{r}{\alpha} e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{\alpha} e^{-\theta\sqrt{-1}} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{\alpha^2} e^{-2\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{r^3}{\alpha^3} e^{-3\theta\sqrt{-1}} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

série qui ne diffère de la précédente que par le changement de θ en $-\theta$.

Puisque les séries (1) et (2) sont convergentes, par le fait seul du décroissement des modules, si on les multiplie membre à membre, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de $\frac{r}{\alpha}$, on aura une nouvelle série convergente dont la somme sera le produit des sommes des deux autres.

Or cette multiplication produit des termes de deux espèces, les uns indépendants de θ,

$$1 + \left(\frac{1}{2}\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{r^3}{\alpha^3}\right)^2 + \ldots;$$

les autres dépendants de θ, et que l'on peut grouper deux à deux de la manière suivante :

$$C\left[e^{(n-n')\theta\sqrt{-1}} + e^{(n'-n)\theta\sqrt{-1}}\right], \quad \text{ou} \quad 2C\cos(n-n')\theta;$$

mais lorsque ces derniers termes, multipliés par $d\theta$, seront soumis à l'intégration qui est indiquée dans l'expression de V, les intégrales s'évanouiront aux deux limites, o et 2π : on peut donc les omettre, et, en intégrant entre les mêmes limites les termes de la première espèce multipliés par $d\theta$, on aura simplement

$$V = 2\pi\omega\rho r\left[1 + \left(\frac{1}{2}\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{r^3}{\alpha^3}\right)^2 + \ldots\right].$$

Supposons maintenant le *point attiré intérieur à l'anneau*, ou $\alpha < r$. Le développement précédent de V n'est plus admissible; car, r étant plus grand que α, la série est divergente. Il faut alors développer suivant les puissances de $\frac{\alpha}{r}$, en préparant le radical sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2-2\alpha r\cos\theta}} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{\alpha}{r}e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\alpha}{r}e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on trouvera

$$V = 2\pi\omega\rho\left[1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha^2}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^2 + \ldots\right].$$

Actuellement, pour avoir l'action exercée sur le point A, il reste à différentier par rapport à α la première ou la seconde de ces expressions de V, selon que le point attiré est extérieur ou intérieur à l'anneau; et l'on a

Pour un point extérieur,

$$(3)\qquad A = -2\pi\mu f\omega\rho\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 2\frac{r^3}{\alpha^3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 4\frac{r^5}{\alpha^5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 6\frac{r^7}{\alpha^7} + \ldots\right].$$

L'expression de la force étant négative, le point sera attiré et marchera vers la surface externe de l'anneau.

Pour un point intérieur,

$$(4)\qquad A = \frac{2\pi\mu f\omega\rho}{r}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 2\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 4\frac{\alpha^3}{r^3} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 6\frac{\alpha^5}{r^5} + \cdots\right].$$

La valeur de A est positive; donc le point sera repoussé du centre vers la circonférence de l'anneau.

Ainsi, il n'en est pas des actions exercées par les éléments d'un anneau sur un point placé à l'intérieur, comme des actions exercées par les éléments d'une couche sphérique qui envelopperait ce point; on sait que la résultante de ces dernières est nulle, en sorte que le point qui leur est soumis reste en équilibre, quelle que soit sa position dans l'intérieur de la couche.

Cette différence de résultats s'explique aisément :

En effet, soit mm' un élément infiniment petit de l'anneau (*fig.* 40); joignons Am, Am'. ces droites prolongées interceptent un second élément pp'; comparons les actions contraires de ces deux éléments sur le point A :

L'attraction de mm' sur A est égale à $\mu f \rho \omega \frac{mm'}{\overline{Am}^2}$.

L'attraction de pp' sur A est égale à $\mu f \rho \omega \frac{pp'}{\overline{Ap}^2}$.

Or, les triangles infinitésimaux Amm', App' sont semblables, et donnent la proportion

$$\frac{mm'}{Am} = \frac{pp'}{Ap};$$

donc le rapport de l'attraction exercée par mm' à l'attraction exercée par pp' est égal à $\frac{Ap}{Am}$; et, par suite, le point A est plus attiré par celui des deux éléments dont il est plus voisin. Si donc on divise l'anneau en deux parties CmB, CpB par une perpendiculaire élevée en A sur oA, l'arc CmB exercera sur A une attraction prépondérante, et ce point marchera vers I en s'éloignant du centre.

Si, au lieu d'un anneau plan, il s'agissait d'une couche sphérique, les éléments *linéaires* mm', pp' seraient remplacés par des éléments *superficiels*, bases des deux cônes

infinitésimaux dont A serait le sommet; ces bases étant semblables seraient entre elles dans le rapport

$$\frac{\overline{mm'}^2}{\overline{pp'}^2} \text{ ou } \frac{\overline{\mathrm{A}m}^2}{\overline{\mathrm{A}p}^2};$$

et, par conséquent, les actions contraires de ces deux éléments de couche sphérique seraient égales entre elles. Le plan BAC partagerait donc la couche en deux segments dont les attractions se détruiraient mutuellement.

2. *L'attraction exercée par une barre homogène* XX' (fig. 41), *de longueur indéfinie et d'une épaisseur très-petite, dont chaque point attire un point extérieur* A *en raison inverse du carré de la distance, est égale à l'attraction qu'exercerait suivant cette loi, sur le même point* A, *un demi-anneau circulaire* DoE *de même matière et de même épaisseur, tangent à la barre, ayant son centre en* A, *et pour axe la perpendiculaire abaissée de ce point sur la barre; l'attraction est inversement proportionnelle à la simple distance du point attiré à la barre.*

Soient $mm' = dx$ un élément de la barre, x la distance om, θ l'angle $o\mathrm{A}m$, a la distance $\mathrm{A}o$; et conservons aux lettres μ, f, ω, ρ, la même signification que dans le problème précédent. Si l'on pose, pour abréger, $\mu f \omega \rho = \mathrm{K}$, l'attraction exercée par l'élément mm' suivant $\mathrm{A}m$ sera

$$\mathrm{K}\frac{dx}{\overline{\mathrm{A}m}^2};$$

or $\quad x = a \operatorname{tang} \theta, \quad$ d'où $\quad dx = \dfrac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}, \quad \mathrm{A}m = \dfrac{a}{\cos\theta}.$

L'expression de l'attraction de mm' devient

$$\mathrm{K}\frac{d\theta}{a} = \frac{\mathrm{K}a\,d\theta}{a^2}.$$

Or, telle est aussi l'attraction qui serait exercée sur A par l'élément pp' de l'anneau circulaire DoE.

L'attraction totale de la barre sera évidemment dirigée suivant la perpendiculaire Ao; pour l'obtenir, il suffira de faire la somme des composantes suivant cette direction de toutes les actions élémentaires exprimées par $K\frac{d\theta}{a}$: cette somme est

$$\frac{2K}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{2K}{a}.$$

Elle est donc en raison inverse de la simple distance.

C. Q. F. D.

Si l'on considérait seulement l'attraction exercée par une portion finie BC de la barre sur le point A, il est clair qu'elle serait égale à l'attraction de la portion PQ de l'anneau comprise entre les rayons vecteurs extrêmes; par suite elle serait dirigée suivant la bissectrice de l'angle BAC, et il serait facile de calculer son intensité en faisant la somme des actions élémentaires estimées suivant cette bissectrice. En désignant par θ_0, θ_1 les angles oAB, oAC, l'attraction de la portion BC serait mesurée par

$$\frac{2K}{a}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right).$$

3. *L'attraction exercée par une couche* MN *plane, homogène, d'une étendue indéfinie et d'une épaisseur infiniment petite, dont chaque point attire un point extérieur* A, *en raison inverse du cube de la distance, est égale à l'attraction qu'exercerait, suivant la même loi, une couche hémisphérique* DoRE, *de même épaisseur et de même matière, tangente au plan* MN, *ayant son centre au point* A, *et pour axe la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan. Cette attraction est inversement proportionnelle à la simple distance* Ao *du point attiré au plan* (fig. 42).

Soient $Ao = a$, θ l'angle oAm, ψ l'angle que le rayon vecteur om ou r fait avec une droite fixe ox tracée dans le plan. Considérons un élément mm' dont la surface, exprimée dans le système de coordonnées r et ψ, est $rdrd\psi$; l'attraction qu'il exerce sur le point A, suivant Am, est

$$\frac{\mathrm{K}\, r dr\, d\psi}{\overline{\mathrm{A}m}^3} = \frac{\mathrm{K} \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{a},$$

puisque $\mathrm{A}m = \dfrac{a}{\cos\theta}, \quad r = a \tang\theta.$

Or, l'élément de la couche hémisphérique, correspondant à mm', étant $a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$, son attraction sur A sera

$$\frac{\mathrm{K}.\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{a^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{K}.\, \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{a},$$

c'est-à-dire égale à la valeur ci-dessus.

L'attraction totale du plan indéfini MN est évidemment dirigée suivant $\mathrm{A}o$, et sa valeur est la somme des composantes suivant cette direction des actions élémentaires exprimées par la formule précédente, ou

$$\frac{\mathrm{K}}{a}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\mathrm{K}\pi}{a}.$$

C. Q. F. D.

La proposition que nous venons de démontrer directement pouvait être déduite de la précédente, en décomposant la couche plane en une infinité de tranches matérielles parallèles entre elles, et prenant la résultante des actions de toutes ces tranches:

En effet, soit DCE (*fig.* 43) l'une de ces tranches; la perpendiculaire oy la coupe en un point C, et la direction CA sera celle de la résultante des actions de tous les éléments de la tranche sur le point A.

Soient $Cm = x, \quad AC = b, \quad CAM = \omega,$

$$mm' = dx = d(b \tan \omega) = \frac{b\,d\omega}{\cos^2\omega};\ Am = \frac{b}{\cos\omega},$$

l'attraction de l'élément mm' sur A est égale à

$$\frac{K\,dx}{\overline{Am}^2} = \frac{K \cos\omega\,d\omega}{b^2},$$

et, par suite, l'attraction totale de la tranche indéfinie DCE est

$$\frac{2K}{b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\omega\,d\omega = \frac{K\pi}{2b^2}.$$

Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance AC; le point A est donc dans le même cas que s'il était sollicité par une infinité de forces, émanant de tous les points C de la droite indéfinie yy', et inversement proportionnelles aux carrés des distances. C'est précisément le cas du théorème 2; donc la résultante de toutes ces forces sera égale à

$$2\cdot\frac{K\pi}{2a} = \frac{K\pi}{a},$$

résultat conforme à celui que nous avions trouvé.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES A LA DÉTERMINATION DES COURBES D'ÉQUILIBRE D'UN POIDS SOUMIS A DIVERSES CONDITIONS.

---

1. *Déterminer la courbe fixe* AmB (fig. 44) *sur laquelle un poids* P *est assujetti à glisser pour que, dans toutes ses positions, ce poids fasse équilibre à un poids* P′ *suspendu verticalement à un cordon inextensible, qui passe sur une poulie* C *et s'attache au poids* P. (*On néglige le poids du cordon.*)

Prenons pour axes la verticale CP′x et l'horizontale Cy; soient x et y les coordonnées du poids P, r le rayon vecteur CP, x' l'abscisse du point P′, l la longueur constante du cordon P′CP; on a

$$x' + r = l.$$

Le système étant à liaisons complètes, le principe des vitesses virtuelles ne fournit qu'une seule équation

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{P}'\,dx' = 0,$$

à laquelle il faut associer celle qu'on obtient en différentiant l'équation de condition précédente,

$$dx' + dr = 0;$$

éliminant dx', il vient

$$\mathrm{P}\,dx - \mathrm{P}'\,dr = 0,$$

et, intégrant,

$$r = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\,x + \mathrm{const}$$

Le rayon vecteur étant fonction rationnelle de l'abscisse, la courbe cherchée sera une section conique ayant le point C pour foyer, et pour axe principal la verticale Cx. Comme le poids P est en partie détruit par la résistance de la courbe sur laquelle il repose, et que le poids P′ conserve toute son action, il est évident que P doit être plus grand que P′; ce qu'indique d'ailleurs l'équation $P\,dx = P'\,dr$. On a donc $\frac{P}{P'} > 1$, et, par suite, la section conique ne peut être qu'une hyperbole.

La constante arbitraire introduite par l'intégration sera déterminée par la condition que la courbe passe par un point donné. Si l'on suppose que ce point soit l'origine C, la constante sera nulle; le rayon r sera proportionnel à l'abscisse x, ce qui caractérise une ligne droite, ou plutôt un plan incliné passant par le point C, et sur lequel le poids P pourra glisser.

2. *Une barre pesante* AB (fig. 45) *est mobile dans un plan vertical* ABC, *autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, et passant par l'extrémité* A. *Au sommet* C *de la verticale* AC *est placée une poulie, sur laquelle s'enroule une corde* BCM, *inextensible, dont un bout soutient l'extrémité* B *de la barre, et l'autre un poids* M. *On propose de déterminer une courbe fixe* DME, *telle que le poids* M *assujetti à reposer sur cette courbe, fasse constamment équilibre à la base.*

La figure peut représenter la section verticale faite par le centre de gravité G du tablier d'un *pont-levis*, et les tensions des deux chaînes qui soutiennent le pont seraient remplacées par leur résultante dirigée suivant le cordon BC.

Les forces qu'il s'agit d'équilibrer sont le poids P de la barre appliqué à son centre de gravité G et le poids M.

Soient x et x' les abscisses des points G et M, comptées

sur l'axe vertical Cx à partir de l'origine C. Le principe des vitesses virtuelles donne l'équation

$$(1) \qquad M\,dx + P\,dx' = 0.$$

Soient $AC = h$, $AB = l$, $AG = s$, $Cm = r$; a la longueur totale du cordon BCM; nous introduirons comme variable auxiliaire l'abscisse CK du point B; soit $CK = X$.

Les liaisons du système s'expriment par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{h - x'}{h - X} = \frac{s}{l}, \\ &l^2 = h^2 + (a - r)^2 - 2hX, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &dX = \frac{l}{s}\,dx', \\ &(a - r)\,dr + h\,dX = 0; \end{aligned}\right.$$

éliminant dx' et dX entre les équations (1) et (2), il reste une équation entre les coordonnées r et x du point M,

$$(a - r)\,dr = \frac{M\,hl}{Ps}\,dx.$$

Soit, pour abréger, $\frac{M}{P} \cdot \frac{hl}{s} = b$; l'intégration donne

$$ar - \frac{r^2}{2} = bx + c,$$

c étant la constante arbitraire; ou, si l'on désigne par θ l'angle MCx,

$$ar - \frac{r^2}{2} = br\cos\theta + c.$$

Soient r_0, θ_0 les coordonnées d'un point donné par lequel la courbe doit passer; on aura

$$c = (a - b\cos\theta_0)\,r_0 - \frac{r_0^2}{2}.$$

Nous nous bornerons à discuter le cas où les coordon-

nées r_0, θ_0 satisfont à la condition $c = 0$. Alors, en supprimant le facteur r, on a simplement

$$r = 2a - 2b\cos\theta.$$

La courbe représentée par cette équation est bien connue; c'est l'épicycloïde qu'engendre un cercle de rayon a, roulant sur un autre cercle égal au premier, tandis qu'un point m pris sur un rayon du cercle mobile et distant de son centre de la quantité b, tourne avec celui-ci.

En effet, soient A (*fig.* 47) le point où se touchaient les deux cercles à l'origine, m la position du point décrivant lorsque le cercle roulant, dont le centre est C′, est venu toucher en B le cercle fixe dont C est le centre; en sorte que arc AB = arc A′B; soient $CA = a$, $c'm = b$. Prenons sur le rayon fixe CA, prolongé s'il est nécessaire, une longueur $CO = b$; le point O sera l'origine des rayons vecteurs, et COx l'axe polaire. Soient $Om = r$, $mOx = \theta$; mO étant parallèle à CC′, se projette en vraie grandeur sur cette droite, et l'on a

$$CC' = O'm' + 2CO', \quad \text{ou} \quad 2a = r + 2b\cos\theta,$$

d'où

$$r = 2a - 2b\cos\theta.$$

Dans la construction de cette courbe, on distingue trois cas :

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b.$$

Dans le cas où $a = b$, on a

$$r = 2a(1 - \cos\theta).$$

Si l'on décrit un cercle du point C comme centre avec a pour rayon (*fig.* 46), et que l'on tire un rayon vecteur quelconque CMN incliné à la verticale de l'angle θ, on aura

$$RS = a(1 - \cos\theta), \quad \text{et, par suite,} \quad r = 2\,RS;$$

on aura donc un point M de la courbe en prenant CM double de RS.

En désignant par V l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on trouve

$$V = \frac{1}{2}\theta,$$

ce qui permet de construire aisément la tangente en chaque point. La courbe touche en C la verticale Cx; elle coupe le cercle en un point T, tel que RT est égale au rayon, et la tangente en ce point est horizontale.

Le poids M ne saurait s'écarter du centre C au delà de T, et, quand il atteint cette position, le pont-levis est devenu vertical; son poids est détruit par la résistance de l'axe A, et le poids M est également détruit par la résistance de la courbe sur laquelle il repose. L'autre position limite du pont-levis est l'horizontale AH; la valeur correspondante du rayon vecteur Cm est

$$r = a - \sqrt{h^2 + l^2}, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta = \frac{a + \sqrt{h^2 + l^2}}{2a};$$

ces valeurs de r et de θ déterminent un certain point V de la courbe, et la seule portion *utile* de l'épicycloïde, c'est-à-dire celle que le poids pourra décrire, sera l'arc VT. Le point V sera en C, quand on aura $a = \sqrt{h^2 + l^2}$. Nous ne nous arrêterons pas à la discussion des deux autres cas.

CHAPITRE III.

SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE.

1. *De la figure d'équilibre d'un fil flexible, homogène, d'une épaisseur constante et d'une longueur donnée, attaché par ses extrémités à deux points fixes* A, B, *et dont chaque point est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe* o, *et fonction de la distance du point à ce centre.*

Prenons le centre fixe o (*fig.* 48) pour origine des coordonnées. Soient R la force appliquée au point m (x, y, z) et rapportée à l'unité de longueur du fil; T la tension en ce point; r le rayon vecteur om.

Les équations d'équilibre sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} - \mathrm{R}\frac{x}{r}ds = 0,\\ &d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - \mathrm{R}\frac{y}{r}ds = 0,\\ &d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} - \mathrm{R}\frac{z}{r}ds = 0. \end{aligned}\right.$$

Démontrons d'abord que *la courbe* AmB *est plane*.

En combinant deux à deux les équations précédentes, pour éliminer les seconds termes, on en tire

$$\left.\begin{aligned} &xd.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - yd.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0\\ &xd.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} - zd.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} &d.\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0,\\ &d.\mathrm{T}\left(x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

et, intégrant,

$$\mathrm{T}(xdy - ydx) = cds,$$
$$\mathrm{T}(xdz - zdx) = c'ds.$$

Divisons membre à membre, pour éliminer T, et mettons x^2 en diviseur, il vient

$$\frac{xdz - zdx}{x^2} = \frac{k(xdy - ydx)}{x^2},$$

k désignant la constante $\frac{c'}{c}$. Enfin, par une seconde intégration, on a

$$\frac{z}{x} = k\frac{y}{x} + k',$$

ou

$$z = ky + k'x,$$

équation d'un plan passant par l'origine. Les constantes k et k' seront déterminées par la condition que ce plan renferme les points extrêmes A et B.

Le fil en équilibre est donc contenu tout entier dans le plan conduit par ses deux extrémités fixes et par le centre d'attraction, ce qu'il était aisé de prévoir.

Prenons ce plan pour celui des xy; nous ne conserverons ainsi que les deux premières équations (1),

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} - \mathrm{R}\frac{x}{r}ds = 0, \\ & d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - \mathrm{R}\frac{y}{r}ds = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous en avons déjà tiré

$$(2) \quad \mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = c.$$

Le premier membre de cette intégrale représente le moment de la tension T par rapport au centre fixe. Ainsi le *moment de la tension en chaque point, par rapport au centre fixe, est constant.* Soit p la distance oD (*fig.* 49) du centre à la direction de la tension, l'équation précédente peut s'écrire

$$\mathrm{T}p = c;$$

la tension varie donc en raison inverse de la distance du

centre fixe à sa direction, ou encore, en raison inverse de la projection du rayon vecteur sur la normale mN.

Si l'on multiplie les équations d'équilibre respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et qu'on ajoute les produits, on a, comme on sait,

$$dT = R\,dr, \qquad \text{d'où} \qquad (3) \quad T = c' + \int R\,dr.$$

Ce qui montre que l'*accroissement de tension, en passant d'un point à un autre du fil, dépend uniquement des distances de ces points au centre d'attraction.*

En éliminant T entre (2) et (3), on a l'équation différentielle de la figure d'équilibre,

$$\left(c' + \int R\,dr\right)(x\,dy - y\,dx) = c\,ds.$$

Soit $mox = \theta$; on a

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2};$$

on tirera de l'équation précédente

$$(4) \qquad d\theta = \frac{\pm c\,dr}{r\sqrt{\left(c' + \int R\,dr\right)^2 r^2 - c^2}}.$$

La recherche de la figure d'équilibre est ramenée à une quadrature qu'on saura déterminer exactement pour certaines valeurs données de la fonction R.

Nous avons trouvé (page 67), pour l'expression générale du rayon de courbure d'une courbe plane,

$$\rho = \frac{r\,dr}{d(r \sin V)},$$

où V désigne l'angle de la tangente avec le rayon vecteur. Or

$$r \sin V = p = \frac{c}{T} = \frac{c}{c' + \int R\,dr};$$

donc

$$d(r \sin V) = \frac{-c\,R\,dr}{\left(c' + \int R\,dr\right)^2},$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \rho = -\frac{r(c' + \int \mathrm{R}\,dr)^2}{c\mathrm{R}}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure en fonction du rayon vecteur.

Examinons, en particulier, le cas où la force centrale suit la raison inverse du carré de la distance;

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{r^2}, \quad \int \mathrm{R}\,dr = -\frac{\mu}{r}.$$

L'équation (4) devient

$$d\theta = \frac{\pm c\,dr}{r\sqrt{(\mu - c'r)^2 - c^2}},$$

et si l'on pose $\frac{1}{r} = z$,

$$d\theta = \frac{\mp c\,dz}{\sqrt{c'^2 - 2\mu c' z + (\mu^2 - c^2)z^2}}.$$

L'intégrale s'obtient sous forme finie et prend des formes différentes selon que

$$\mu > c \quad \text{ou} \quad \mu < c, \quad \text{ou} \quad \mu = c.$$

Soit, par exemple, $\mu^2 - c^2 = -n^2$; on trouve

$$r = \frac{n}{-\frac{\mu c'}{n} + \frac{c'}{n}\sqrt{n^2 + \mu^2}\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{n^2 + \mu^2}} - \omega\right)}.$$

Cette équation pourra se construire à l'aide d'une section conique.

Pour déterminer les trois constantes n, c', ω, on a les conditions que le fil passe par les points donnés A et B, et qu'il ait une longueur donnée; si ces conditions ne fournissent pas des valeurs réelles et finies pour les constantes, on en conclura que la forme adoptée à priori pour l'intégrale n'est pas admissible, et l'on recommencera le calcul en partant d'une autre forme.

En général, *la courbe est rectifiable*, car on a

$$ds = dr\sqrt{1 + \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2}} = \frac{(\mu - c'r)\,dr}{\sqrt{(\mu - c'r)^2 - c^2}},$$

d'où

$$s = c'' - \frac{1}{c'}\sqrt{(\mu - c'r)^2 - c^2}.$$

2. *Remarque sur l'élimination de la tangente* T *dans la recherche de la figure d'équilibre du fil flexible.*

Dans la question qui vient de nous occuper, il a suffi, pour obtenir l'équation de la courbe formée par le fil, de substituer dans une combinaison des équations (1), la valeur de T tirée de l'équation (3). En général, l'élimination de T pourra se faire ainsi, toutes les fois que les composantes X, Y, Z de la force (centrale ou non centrale) qui sollicite chaque point du fil, satisferont à la condition d'intégrabilité

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\varphi(x, y, z);$$

parce qu'alors on aura

$$T = \int -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \text{const.} - \varphi(x, y, z).$$

Cependant, si $(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ n'était pas une différentielle exacte, on peut demander comment s'effectuerait l'élimination de T. Pour répondre à cette question, nous prendrons les équations de l'équilibre du fil sous la forme générale

$$(1)\qquad \begin{cases} d\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0; \end{cases}$$

proposons-nous d'en éliminer T et z afin d'avoir une équation différentielle entre y et x seulement. Si l'on effectue

et, par suite, nt par exemple

(5) $\rho = -\frac{r(c}{}$ qui dépende

u nomb

Telle est l'expression

du rayon vecteur.

Examinons, en pa

suit la raison invers

B

L'équation (

du cinquième

connaitre r en fonction

et si l'on ıtraires; par suite, z et T

connues de x et des mêmes con-

r déterminer ces cinq constantes, les

courbe passe par deux points donnés et

L'in ur donnée.

dif une autre méthode d'élimination plus simple. Le

ne des équations (1) peut être remplacé par le suivant :

$$Y\,dx - X\,dy = T\left(\frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds}\right),$$

$$X\,dz - Z\,dx = T\left(\frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds}\right),$$

$$dT = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

puis, si l'on divise les deux premières, membre à membre, on a, en prenant x pour variable indépendante,

$$\frac{Y\,dx - X\,dy}{X\,dz - Z\,dx} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}},$$

équation indépendante de T et *du deuxième ordre* par rapport à y et à z. Enfin, en substituant dans la troisième équation la valeur de T tirée de l'une des deux premières,

…ce par le fil; on la calculera …ations (1).

on a …lindre à base circulaire,

$X\,dx + Y\,d\ldots$ … r^2,

… $= \pm 2r$;

…ultipliées respec-

…meti…

…e la chaînette.

…oit $L = 0$ l'équation …tème d'axes rectangulaires d… …posé vertical et dirigé en sens … posons

$$V = \left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]$$

et soient N la résistance de la surface rapportée à l'u… longueur du fil, p le poids de cette unité; les équati… d'équilibre sont :

$$(1)\quad \begin{cases} d\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + NV\dfrac{dL}{dx}\,ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + NV\dfrac{dL}{dy}\,ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) + NV\dfrac{dL}{dz}\,ds = p\,ds; \end{cases}$$

on en tire

$$dT = p\,dz,$$

d'où

$$T = pz + A.$$

Le fil ayant une longueur donnée, et étant fixé par ses deux extrémités à deux points donnés de la surface, il y aura, dans la figure d'équilibre, un certain point plus bas que tous les autres. Soient c l'ordonnée verticale, et ph la

les différentiations indiquées, en prenant par exemple x pour variable indépendante, les quantités qui dépendent de T et de z dans nos trois équations sont au nombre de cinq,

$$T,\ dT,\ z,\ dz,\ d^2z.$$

En différentiant de nouveau trois fois de suite chacune de ces équations, on aura en tout *douze équations*, d'où l'on pourra éliminer les *onze inconnues*

$$\begin{gathered} T,\ dT,\ d^2T,\ d^3T,\ d^4T, \\ z,\ dz,\ d^2z,\ d^3z,\ d^4z,\ d^5z. \end{gathered}$$

Il restera une équation différentielle du cinquième ordre entre y et x; cette équation fera connaître y en fonction de x et de cinq constantes arbitraires; par suite, z et T seront aussi des fonctions connues de x et des mêmes constantes. On aura, pour déterminer ces cinq constantes, les conditions que la courbe passe par deux points donnés et ait une longueur donnée.

Voici une autre méthode d'élimination plus simple. Le système des équations (1) peut être remplacé par le suivant :

$$\begin{gathered} Y\,dx - X\,dy = T\left(\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}\right), \\ X\,dz - Z\,dx = T\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}\right), \\ dT = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz); \end{gathered}$$

puis, si l'on divise les deux premières, membre à membre, on a, en prenant x pour variable indépendante,

$$\frac{Y\,dx - X\,dy}{X\,dz - Z\,dx} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}},$$

équation indépendante de T et *du deuxième ordre* par rapport à y et à z. Enfin, en substituant dans la troisième équation la valeur de T tirée de l'une des deux premières,

on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d \cdot \frac{Y - X\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right),$$

équation différentielle du *troisième ordre* entre y, z et x. Ainsi, on est amené à intégrer deux équations simultanées, l'une du deuxième ordre, l'autre du troisième. Les intégrales renfermeront, conformément à ce que l'on a vu dans la première méthode, cinq constantes arbitraires.

3. *De la chaînette sur une surface courbe.*

Soit $L = 0$ l'équation de la surface rapportée à un système d'axes rectangulaires dont l'un, celui des z, est supposé vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur; posons

$$V = \left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et soient N la résistance de la surface rapportée à l'unité de longueur du fil, p le poids de cette unité; les équations d'équilibre sont :

$$(1)\quad \begin{cases} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + NV\frac{dL}{dx}ds = 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + NV\frac{dL}{dy}ds = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + NV\frac{dL}{dz}ds = pds; \end{cases}$$

on en tire $$dT = pdz,$$

d'où $$T = pz + A.$$

Le fil ayant une longueur donnée, et étant fixé par ses deux extrémités à deux points donnés de la surface, il y aura, dans la figure d'équilibre, un certain point plus bas que tous les autres. Soient c l'ordonnée verticale, et ph la

tension du fil en ce point; on aura

$$ph = pc + A, \quad \text{d'où} \quad A = p(h - c);$$

d'où l'on voit que si le plan des xy est demeuré arbitraire, il suffira qu'il soit placé à une distance h du point le plus bas, pour que la constante A soit nulle; alors on aura simplement

$$T = pz,$$

c'est-à-dire que si l'on venait à rompre le fil en un point quelconque, on pourrait maintenir une des portions en équilibre, en lui ajoutant un prolongement vertical de même densité passant sur une poulie fixe, et terminé au plan fixe des x, y.

Plus généralement, la différence des tensions en deux points quelconques égale le poids d'une longueur de fil égale à la différence des hauteurs de ces deux points au-dessus d'un même plan horizontal.

Discutons quelques cas particuliers.

1°. *La surface* L *est cylindrique et son axe est vertical.* On a

$$L = f(x, y) = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dL}{dz} = 0.$$

La troisième équation (1) se réduit, en y remplaçant T par pz, à

$$d\left(\frac{zdz}{ds}\right) = ds, \quad \text{d'où} \quad z^2 = s^2 + h^2,$$

en comptant l'arc s à partir du point le plus bas. Cette relation est précisément celle qui a lieu, dans la chaînette ordinaire, entre l'arc et l'ordonnée verticale; donc la courbe tracée par le fil sur le cylindre est telle, qu'elle a pour transformée une chaînette dans le développement de la surface.

La résistance N est égale et contraire à la pression exercée

de dehors en dedans sur la surface par le fil ; on la calculera au moyen des deux premières équations (1).

Supposons qu'il s'agisse d'un cylindre à base circulaire,

$$L = x^2 + y^2 - r^2,$$

$$\frac{dL}{dx} = 2x, \quad \frac{dL}{dy} = 2y, \quad \frac{1}{V} = \pm 2r;$$

on tire des deux premières équations (1), multipliées respectivement par $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$,

$$rN = \pm pz \left(x \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + y \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} \right);$$

mais puisque $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = 0$, on a

$$x \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + y \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = -\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2} = \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - 1,$$

donc $rN = \pm pz \left[\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - 1 \right] = \pm pz \left(\frac{s^2}{z^2} - 1\right)$;

ou, enfin,

$$rN = \frac{ph^2}{z}.$$

La pression varie donc en raison inverse de la hauteur du point considéré au-dessus du plan horizontal des x, y.

Comme on a $T = pz$, on peut dire encore que la *pression en chaque point varie en raison inverse de la tension correspondante.*

2°. *La surface L est une surface conique de révolution dont l'axe est vertical.*

Ici, il convient de prendre pour origine le sommet du cône, et, par conséquent, la constante A de l'expression de T ne sera plus nulle en général ; on aura

$$T = pz + A = p(z + h - c).$$

En prenant pour axe des z l'axe du cône, et désignant par α le demi-angle du sommet, il vient

$$L = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha - z^2\sin^2\alpha,$$

$$\frac{dL}{dx} = 2x\cos^2\alpha,\quad \frac{dL}{dy} = 2y\cos^2\alpha,\quad \frac{dL}{dz} = -2z\sin^2\alpha.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1), on tirera des deux premières,

$$x\,d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - y\,d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad d.T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

et, intégrant,

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = B.$$

Cette intégrale, transformée en coordonnées polaires, va nous fournir la projection horizontale de la courbe cherchée.

Soit θ l'angle que fait avec l'axe des x, la projection horizontale de l'arête du cône aboutissant au point (x, y, z) du fil; on a

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta,\quad z = r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad dz = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}dr,$$

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + \frac{dr^2}{\sin^2\alpha}};$$

et, ces valeurs substituées dans l'équation précédente, on tire

$$d\theta = \frac{B\,dr}{r\sqrt{(pr\cos\alpha + A\sin\alpha)^2 r^2 - B^2\sin^2\alpha}}.$$

Cette expression n'est pas intégrable, en général, sous forme finie. Elle le devient si l'on suppose $c = h$, ou $A = 0$; alors

$$d\theta = \frac{B\dfrac{dr}{r^3}}{\sqrt{p^2\cos^2\alpha - \dfrac{B^2\sin^2\alpha}{r^4}}},$$

ou bien, en posant $\frac{B \sin\alpha}{p \cos\alpha . r^2} = u$,

$$2 \sin\alpha . d\theta = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

L'intégrale est

$$2(\theta - \omega) \sin\alpha = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{B \sin\alpha}{p \cos\alpha . r^2}\right).$$

Au point le plus bas, on peut supposer $\theta = \frac{\pi}{2}$ en faisant passer le plan des yz par ce point; et, de plus, on a alors $r = \frac{h \sin\alpha}{\cos\alpha}$, etc.

Pour avoir la transformée de la courbe décrite par le fil dans le développement du cône, désignons par R la longueur de l'arête dont la projection est r, et par Θ l'angle du développement du cône qui répond à θ,

$$r = R \sin\alpha \quad \text{et} \quad \theta r = \Theta R, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{\Theta}{\sin\alpha}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'intégrale précédente, on trouvera l'équation d'une hyperbole équilatère.

Le calcul de la pression N ne présente rien de remarquable.

4. *Déterminer l'épaisseur variable et supposée très-petite d'un fil flexible, homogène et pesant, suspendu à deux points fixes, de sorte que sa figure soit une courbe donnée.*

En prenant le plan de la courbe pour celui des xy, et pour axe des y la verticale dirigée en sens contraire de la pesanteur, on a les équations

$$d . T \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$d . T \frac{dy}{ds} + g \omega ds = 0,$$

ω désignant le produit de la densité du fil et de la section normale qui a lieu au point m (*fig.* 49).

De la première équation, on tire $T = gh\frac{ds}{dx}$, gh étant la tension au point le plus bas C; et cette valeur de T, substituée dans la deuxième équation, donne

$$hd\frac{dy}{dx} + \omega\, dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = 0.$$

Soit $\frac{dy}{dx} = p$; on tire

$$\omega = -\frac{h\frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La courbe ACB étant donnée, on tirera de son équation les valeurs de p et $\frac{dp}{dx}$ en fonction de x, et, par suite, on aura la fonction de x que ω représente. L'équation précédente peut s'écrire

$$\omega = \frac{h(1+p^2)}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe donnée : supposons que cette courbe soit un cercle ayant son centre en D sur oy, et soit θ l'angle CDm; on aura $p = \tang\theta$, et, par suite,

$$\omega = \frac{h}{\rho\cos^2\theta}.$$

ρ étant constant, on voit que ω, c'est-à-dire l'épaisseur du fil, variera en raison inverse du carré du cosinus de l'angle θ: elle sera la plus petite possible au point le plus bas C où l'on aura $\omega = \frac{h}{\rho}$.

CHAPITRE IV.

SUR LA FIGURE PERMANENTE QUE PEUT PRENDRE UN SYSTÈME VARIABLE DE POINTS MATÉRIELS, ANIMÉ D'UN MOUVEMENT DE ROTATION.

1. *Un fil flexible, homogène, non pesant et de longueur invariable, est animé d'un mouvement de rotation autour de la droite qui joint ses extrémités fixes. Ce fil peut-il prendre une figure permanente, et quelle sera cette figure?* (Question proposée par M. Sturm, au concours d'agrégation de 1842.)

Pour que le fil puisse prendre une figure permanente, il faut que le mouvement de rotation soit uniforme. En effet, supposons que le fil tourne en conservant constamment sa figure; on ne changera rien à son mouvement en supposant qu'il devienne rigide, puisque les forces effectives prises en sens contraires, qui, d'après le principe de d'Alembert, se font actuellement équilibre sur le fil flexible, se feront encore équilibre après sa solidification : mais alors ce fil sera dans les mêmes conditions qu'un corps solide tournant autour d'un axe fixe, *sans être sollicité par aucune force*, et l'on sait qu'alors la vitesse angulaire de rotation est constante.

Supposons donc qu'un fil AmB (*fig.* 50) tourne avec une vitesse constante autour de l'axe AB; prenons cette droite pour axe des x et le point A pour origine. La force effective, rapportée à l'unité de longueur du fil, qui sollicite chaque élément ds, peut en général se décomposer en deux, l'une tangentielle, $\frac{dV}{dt}ds$ (qui est nulle ici, puisque la vitesse V ne varie pas avec t); l'autre centripète, $\frac{V^2}{\rho}ds$, qui

est dirigée suivant le rayon r du cercle décrit par le point m. En désignant par ω la vitesse angulaire de rotation, on a $V = r\omega$, et $\rho = r$; la valeur de la force centripète est donc $r\omega^2\, ds$, et ses composantes parallèles aux axes des x, y, z sont 0, $-\omega^2 y$, $-\omega^2 z$.

Or, le fil doit être en équilibre sous l'action de semblables forces prises en sens contraires; on aura donc les équations

$$d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} + \omega^2 y\, ds = 0,$$

$$d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} + \omega^2 z\, ds = 0.$$

De ces équations, on conclut d'abord que *la courbe est plane :*

En effet, si l'on multiplie la seconde équation par z et la troisième par y, et qu'on retranche membre à membre, il vient

$$z\, d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - y\, d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} = 0,$$

équation qui équivaut à

$$d.\mathrm{T}\left(z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\mathrm{T}\left(z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right) = c.$$

Mais la constante c est nulle; car, au point A, on a $y = 0$, $z = 0$, et les cosinus $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ ne peuvent prendre que des valeurs finies, ainsi que la tension T. Ces valeurs devant vérifier l'équation précédente, on en tire $c = 0$, et, par suite, on a pour tout point de la courbe,

$$z\, dy - y\, dz = 0, \quad \text{ou} \quad d\left(\frac{y}{z}\right) = 0;$$

d'où

$$z = my + n,$$

équation d'un plan parallèle à l'axe des x. Ce plan, devant renfermer les points A et B, passera par l'axe lui-même, d'où $n = 0$; quant à la constante m, elle doit rester indéterminée, puisque le fil peut être placé dans un azimut quelconque.

Prenons pour plan de la courbe le plan $x\mathrm{A}y$; nous n'aurons plus à traiter que les deux équations

$$d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} + \omega^2 y\, ds = 0.$$

La première s'intègre immédiatement, et donne

$$(1) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2} c\,\omega^2 \frac{ds}{dx},$$

en désignant par $\frac{1}{2} c\,\omega^2$ la constante arbitraire.

c est une quantité positive, car la tension T est positive, et l'on peut toujours faire que $\frac{dx}{ds}$ soit positif au point A, en y plaçant l'origine des arcs. Substituant cette expression de T dans la seconde équation, il vient

$$c\,d.\frac{dy}{dx} + 2y\,ds = 0.$$

Cette équation déterminera la figure d'équilibre du fil.

Il est à remarquer que le facteur ω a disparu; d'ailleurs, la valeur de la constante c ne dépend que des limites et de la longueur du fil, mais nullement de ω; donc *la forme de la courbe ne dépend pas de la vitesse angulaire*. Ce résultat, en apparence paradoxal, s'explique en observant que, d'après l'équation (1), si le mouvement s'accélère, la ten-

sion du fil en chaque point augmente proportionnellement au carré de la vitesse angulaire.

Pour intégrer l'équation précédente, on pose $\frac{dy}{dx} = p$, d'où $ds = \frac{dy}{p}\sqrt{1+p^2}$, et il vient

$$\frac{c\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + 2y\,dy = 0;$$

on en tire l'intégrale première

$$c\sqrt{1+p^2} = a - y^2, \quad \text{ou} \quad (a-y^2)\frac{dx}{ds} = c,$$

a étant une constante arbitraire.

Comme on a au point A, $a\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = c$, on voit que la constante a est de même signe que c, c'est-à-dire positive; et de plus, qu'elle est plus grande que c.

$\frac{dx}{ds}$ ne peut devenir négatif en aucun point de la courbe; car le changement de signe de $\frac{dx}{ds}$, s'il avait lieu, exigerait que cette fonction finie et continue de x passât par zéro, d'où l'on conclurait que la constante c est nulle : ce qui est inadmissible. Ainsi, l'arc croît constamment avec l'abscisse depuis A jusqu'à B.

De l'équation précédente on tire

$$(2) \qquad dx = \pm\frac{c\,dy}{\sqrt{(a-y^2)^2 - c^2}};$$

cette expression n'est pas intégrable, en général; mais on peut reconnaître d'après elle certains caractères de la courbe. y ne saurait dépasser $\sqrt{a-c}$, quantité réelle d'après ce qui a été dit plus haut; quand l'ordonnée atteint cette valeur maximum, on a $\frac{dy}{dx} = 0$, et, par conséquent, la tangente est parallèle à l'axe AB.

A partir de l'origine A, jusqu'au point C pour lequel $y = \sqrt{a - c}$, on devra prendre le signe + dans le second membre de l'équation (2), puisque y croît avec x; au delà de ce point, y commence à décroître, on prendra le signe —; et l'on voit qu'à des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ égales et de signes contraires, répondent des valeurs égales de y : la courbe est donc symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe de révolution menée par le point le plus haut.

L'équation (2) coïncide avec celle qui résout le problème d'analyse traité dans la *seconde partie* de cet ouvrage (*chapitre VII*, § 1). Le lecteur y trouvera les équations de condition qui existent entre les constantes a et c, ainsi que la discussion du cas où la longueur donnée ($2l$) du fil diffère peu de la distance ($2b$) des points extrêmes A et B. La figure d'équilibre se confond alors sensiblement avec une sinusoïde.

Mais il faut remarquer qu'outre la courbe ACB, qui satisfait au problème d'analyse dont nous parlons, *il existe une infinité d'autres figures d'équilibre également possibles.* En effet, la figure ACB suppose que le fil soit situé tout entier d'un même côté de l'axe AB. Or, si l'on conçoit qu'avant de lui imprimer son mouvement de rotation on l'ait partagé par moitiés, telles que ACO, OC′B (*fig.* 51) placées de part et d'autre de l'axe; puis, qu'on l'ait mis en mouvement en fixant d'abord son point milieu O, il est visible que ce point, abandonné à lui-même, demeurera immobile en vertu des tractions parfaitement égales et contraires qu'il éprouvera de la part des portions égales et symétriques qu'il sépare, et le fil se mouvra avec la figure permanente ACOC′B. Cette figure présente deux points C, C′ où l'ordonnée (abstraction faite du signe) atteint la valeur maximum $\sqrt{a - c}$; mais les constantes a et c ne seront plus

les mêmes que dans le premier cas, où il n'existait qu'une ordonnée maximum. En effet, en conservant les notations $2b$, $2l$ pour désigner la distance AB et la longueur du fil, nous avons $AP = \frac{b}{2}$ et arc $AC = \frac{l}{2}$; les équations (3) et (4) du problème d'analyse déjà cité seront donc remplacées par les suivantes :

$$b = 2c\int_0^{\sqrt{a-c}} \frac{dy}{\sqrt{(a-y^2)^2 - c^2}},$$

$$l = 2\int_0^{\sqrt{a-c}} \frac{(a-y^2)\,dy}{\sqrt{(a-y^2)^2-c^2}}.$$

On conçoit de même que le fil pourrait être partagé en trois, en quatre, en n parties égales situées alternativement de part et d'autre de l'axe (*fig.* 51).

L'équation de la sinusoïde obtenue par approximation dans le cas où la figure du fil s'écarte peu de la droite AB, rend bien compte de ces diverses solutions. En effet, on a trouvé (page 117)

$$y = a\sqrt{\frac{1-m^2}{2}}\sin\frac{x\sqrt{2}}{ma},$$

où les constantes a et c ont été remplacées, pour l'homogénéité, par a^2 et ma^2.

Pour déterminer a et m, on a les conditions que la courbe passe au point B, et que l'arc AB ait une longueur donnée : les coordonnées du point B étant $y = 0$, $x = 2b$, on aura d'abord

$$\frac{2b\sqrt{2}}{ma} = n\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque; et, par suite,

$$y = \frac{2b\sqrt{1-m^2}}{mn\pi}\sin\frac{n\pi}{2b}x.$$

En donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, 4, ..., cette équation représentera une infinité de sinusoïdes qui seront les différentes figures d'équilibre dont nous avons reconnu la possibilité.

2. *Un vase à deux branches verticales* AB, CD (fig. 52), *réunies par un tube horizontal, et symétriquement disposées par rapport à un axe vertical oz, contient du mercure dans ses deux branches. On suppose que l'on imprime à ce vase un mouvement uniforme de rotation autour de oz. La colonne mercurielle se divise et laisse un vide efgh dans la branche horizontale qui n'est plus qu'en partie remplie, tandis que le liquide s'élève dans les deux branches verticales.*

On propose de déterminer la figure permanente du liquide et les dimensions de l'espace vide.

D'après le principe de d'Alembert, il doit y avoir équilibre, eu égard aux liaisons du système, entre les *forces appliquées* à tous les points de la masse liquide en mouvement et les *forces effectives* prises en sens contraire.

Si l'on désigne par X, Y, Z, les composantes de la force, rapportée à l'unité de masse (la pesanteur), qui agit au point dont les coordonnées sont x, y, z, par p la pression en ce point, par ρ la densité du liquide, par X′, Y′, Z′ les composantes de la force accélératrice qui produirait sur chaque point libre le mouvement qu'il a réellement; on a, d'après les principes de l'hydrostatique,

$$\frac{dp}{dx} = \rho\,(X - X'),$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho\,(Y - Y'),$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho\,(Z - Z').$$

Or, on suppose que le liquide tourne en conservant une figure permanente; la pression p est donc indépendante du

temps, et n'est fonction que des coordonnées x, y, z. Par suite, on déduit des trois équations précédentes,

$$dp = \rho[(X - X')dx + (Y - Y')dy + (Z - Z')dz],$$

équation propre à déterminer la pression.

Il en résulte que la figure permanente ne sera possible qu'autant que l'expression

$$\rho[(X - X')dx + (Y - Y')dy + (Z - Z')dz]$$

sera la différentielle totale d'une fonction de x, y, z. Cherchons la valeur de cette expression :

La densité ρ est une constante donnée.

En prenant pour axe des z l'axe de révolution, on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

La force accélératrice effective se réduit à la force centripète $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$, puisque la composante tangentielle $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ est nulle dans un mouvement uniforme; soient ω la vitesse angulaire de rotation, r la distance du point (x, y, z) à l'axe oz, on a $v = r\omega$, $\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2}$: la force effective a donc pour intensité $r\omega^2$, et comme elle est dirigée suivant le rayon r, ses composantes sont

$$X' = -\omega^2 x, \quad Y' = -\omega^2 y, \quad Z' = 0;$$

par suite,

$$dp = \rho[-g\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy)].$$

Cette expression est bien une différentielle exacte, et en l'intégrant on a

$$(1) \qquad p = -g\rho z + \frac{\omega^2 \rho}{2}(x^2 + y^2) + c,$$

c étant une constante arbitraire, qu'on déterminera plus loin.

Les surfaces supérieures ab, cd des deux colonnes liquides

sont des surfaces de niveau, c'est-à-dire que la pression est constante dans tous leurs points : on a donc pour ces surfaces

$$dp = 0, \quad \text{ou} \quad -g\,dz + \frac{\omega^2}{2} d(x^2 + y^2) = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + k,$$

k étant une nouvelle constante.

Ainsi les surfaces libres ab, cd sont des portions d'un même paraboloïde de révolution dont l'axe est celui de la rotation.

Les surfaces libres inférieures ef, gh appartiennent aussi à un paraboloïde de révolution autour du même axe, dont l'équation ne différera de la précédente que par la constante, et sera

$$(3) \qquad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + k';$$

mais les constantes k et k' ne sont pas indépendantes entre elles. Si l'on exprime qu'à la première surface, la pression p est égale à la pression atmosphérique ϖ, et qu'à la seconde surface la pression est nulle, on aura, d'après l'équation (1),

$$\varpi = -g\rho k + c, \quad 0 = -g\rho k' + c,$$

d'où

$$k' = k + \frac{\varpi}{g\rho}.$$

Pour que les deux paraboloïdes qui limitent la colonne $abef$ soient complétement déterminés, il ne reste plus qu'à calculer la valeur de k. A cet effet, on a la condition que le volume de cette colonne soit équivalent à la moitié du volume total qu'occupait le mercure, à l'origine du mouvement, avant que la masse ne fût divisée. Or, le volume $abef$ s'évalue par les règles ordinaires de la cubature des solides

terminés par des surfaces de révolution. Comme on doit admettre qu'il reste toujours du mercure dans la branche horizontale CB, on pourra concevoir deux sections normales *pq*, *rs*, entre lesquelles sera comprise une partie du liquide regardée comme fixe et connue, et il ne restera qu'à évaluer les cylindres *pqef*, *rsab*, tronqués par les paraboloïdes définis par les équations (2) et (3), où k' sera remplacé par $k + \frac{\varpi}{g\rho}$.

La somme de ces deux volumes dépendra de la constante k, et en l'égalant à la moitié du volume total du mercure diminuée de la partie connue *pqrs*, on aura une équation propre à déterminer k.

Cela fait, on calculera sans difficulté le volume de la partie vide *efgh*.

Enfin, comme on a $c = \varpi + g\rho k$, l'équation (1) devient

$$p = -g\rho z + \frac{\omega^2\rho}{2}(x^2 + y^2) + \varpi + g\rho k,$$

et fait connaître la pression en un point quelconque de la masse liquide.

LIVRE DEUXIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA TRACTOIRE ET DE LA LIGNE DE POURSUITE.

1. *Déterminer le mouvement d'un point matériel attaché à un fil inextensible et sans masse, situé dans un plan horizontal, dont l'autre extrémité est entraînée le long d'une courbe donnée avec une vitesse donnée, constante ou variable. — On a égard au frottement sur le plan* (*).

Soient x et y (*fig.* 53) les coordonnées du point m dont la masse sera prise pour unité ; α et β celles de l'extrémité A du fil qui est assujettie à décrire la ligne donnée CD; θ l'angle de la direction du fil avec l'axe ox : α et β sont des fonctions, censées connues, du temps. En représentant par T la tension du fil, par l sa longueur mA, par R la résistance due au frottement, on aura pour équations du mouvement,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{T}\cos\theta - \mathrm{R}\frac{dx}{ds}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mathrm{T}\sin\theta - \mathrm{R}\frac{dy}{ds}, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x - \alpha &= -l\cos\theta, \\ y - \beta &= l\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces quatre équations permettent de déterminer x, y, θ et T en fonction du temps.

L'élimination de T entre les deux premières donne d'a-

(*) Académie de Saint-Pétersbourg, 1784 : Mémoire d'Euler à consulter.

bord

$$(3)\qquad \sin\theta\frac{d^2x}{dt^2}+\cos\theta\frac{d^2y}{dt^2}+R\left(\sin\theta\frac{dx}{ds}+\cos\theta\frac{dy}{ds}\right)=0.$$

Nous nous bornerons à considérer deux cas limites, pour lesquels cette équation se simplifie, savoir :

$$R=0,\quad R=\infty.$$

1°. $R=0$: *le frottement est supposé nul.*

L'équation (3) se réduit à

$$(4)\qquad \sin\theta\frac{d^2x}{dt^2}+\cos\theta\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Si l'on y remplaçait $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations (2), on aurait une relation entre θ et t, qui ferait connaître le mouvement de rotation du point m autour du point A. Mais, comme on ne peut pas intégrer en général cette équation différentielle, nous ne l'écrirons pas et nous nous bornerons à la former directement dans quelques cas particuliers où elle est intégrable.

En premier lieu, supposons que le point A soit assujetti à décrire une ligne droite d'un mouvement uniforme; prenons cette droite pour axe des x, et soit b la vitesse du mouvement; on aura

$$\beta=0,\qquad \frac{dx}{dt}=b,\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2\beta}{dt^2}=0;$$

et l'équation précédente se réduit, après la substitution indiquée ci-dessus, à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=0,\quad \text{d'où}\quad \frac{d\theta}{dt}=\text{const.}=-c.$$

(Nous représentons la constante par $-c$, parce que θ diminue quand t augmente.)

Ainsi, le mouvement relatif du point m, par rapport au point A, est uniforme.

Ce résultat est une conséquence du principe général des mouvements relatifs. En effet, la force qui sollicite le point A dans son mouvement rectiligne étant nulle, la force égale et contraire qu'il faut appliquer en m pour avoir le mouvement relatif de ce point autour de A est nulle : d'ailleurs, la tension du fil dirigée suivant le rayon mA ne donne pas de composante tangentielle ; donc le point m tournera uniformément autour de A.

On conclut immédiatement de là que la trajectoire du point m sera du genre des cycloïdes. En effet, si l'on considère un cercle d'un rayon indéterminé AB $= r$ (*fig.* 54), qui roule d'un mouvement uniforme sur une droite CD parallèle à ox et distante de cet axe d'une quantité égale à r, le centre A décrira lui-même, d'un mouvement uniforme, l'axe ox, et le rayon AB tournera aussi uniformément. Prenons sur ce rayon prolongé, s'il est nécessaire, un point M distant du centre de la quantité A$m = l$. Pour que ce point ait exactement le mouvement de la masse m, il suffira que le centre A marche sur ox avec la même vitesse b que l'extrémité homologue A de la tige mobile, et que le rayon r satisfasse à la condition

$$-r d\theta = b dt, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{b}{c}.$$

Selon que l'on aura $l > \frac{b}{c}$, ou $l < \frac{b}{c}$, ou $l = \frac{b}{c}$, le point m décrira une *cycloïde allongée*, ou une cycloïde *raccourcie*, ou une cycloïde ordinaire.

L'analyse va nous conduire aux mêmes conséquences.

Les équations (2) donnent :

$$\frac{dx}{dt} = b - c l \sin\theta = b - cy,$$

$$\frac{dy}{dt} = -c l \cos\theta = -c\sqrt{l^2 - y^2};$$

d'où l'on conclut l'équation différentielle de la trajectoire

du poi nt m en coordonnées rectangulaires

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c\sqrt{l^2-y^2}}{cy-b}, \quad \text{ou} \quad dx=\frac{\left(y-\frac{b}{c}\right)dy}{\sqrt{l^2-y^2}},$$

dont l'intégrale est

$$x=\frac{b}{c}\arccos\frac{y}{l}-\sqrt{l^2-y^2}+\text{const.}$$

On reconnaît ici une courbe du genre des cycloïdes. En effet, cette courbe serait engendrée par un point du plan d'un cercle de rayon $\frac{b}{c}$, dont le centre parcourrait l'axe ox, tandis que le cercle roulerait sans glisser sur une parallèle à cet axe, l représentant la distance du point décrivant au centre du cercle.

La valeur de la constante c dépend des données initiales.

Supposons qu'à l'origine du mouvement, le fil ait été placé dans la position oC (*fig.* 55), perpendiculaire à la directrice ox, et prenons cette ligne pour axe des y. Le point mobile, qui est alors en C, a pour coordonnées $x=0$, $y=o\mathrm{C}=l$; nous supposons de plus que ce point n'ait pas de vitesse initiale.

On aura pour $t=0$,

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \quad \frac{dx}{dt}=0, \quad \text{ou} \quad b-cl=0, \quad \text{d'où} \quad c=\frac{b}{l}.$$

Par suite, l'équation de la trajectoire sera

$$x=l\arccos\frac{y}{l}-\sqrt{l^2-y^2},$$

équation d'une cycloïde dont le cercle générateur de rayon l roule sur une parallèle CD à ox, et dont l'origine est au point C.

En général, on a pour le carré de la vitesse absolue du

point m,

$$v^2 = (b - cy)^2 + c^2(l^2 - y^2) = b^2 + c^2 l^2 - 2\,bcy\,;$$

les maxima et minima de cette vitesse correspondront aux minima et maxima de l'ordonnée y.

Dans le cas que nous venons de discuter, on a plus simplement

$$v^2 = 2\,b^2\left(1 - \frac{y}{l}\right).$$

Aux points de rebroussement C et D, la vitesse est nulle ; et, au sommet S, elle atteint son maximum égal à $2\,b$, c'est-à-dire au double de la vitesse de translation du point A.

Si le mobile avait une vitesse initiale k, inclinée à l'axe des x du même angle α que le fil moteur (angle que nous ne supposons plus droit), on aurait, pour $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = k\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -\,k\sin\alpha,$$

d'où

$$k\cos\alpha = b - cl\sin\alpha, \quad k\sin\alpha = cl\cos\alpha\,;$$

et l'élimination de la constante c conduirait à une équation de condition entre les données du problème, k, b, α, savoir :

$$k = b\cos\alpha.$$

Ainsi, pour que le problème fût possible, la vitesse initiale du point m devrait être la projection, sur la direction du fil, de la vitesse constante qui anime le point A.

En général, puisqu'on a

$$\frac{dx}{dt} = b - cl\sin\theta, \quad \frac{dy}{dt} = -\,cl\cos\theta,$$

on voit que la vitesse du point m peut toujours être décomposée en deux autres, l'une constante égale à b et parallèle à l'axe des x, l'autre dont la grandeur cl peut être quel-

conque, et dont la direction est perpendiculaire au fil moteur mT.

Nous avons supposé jusqu'ici que le point A se mouvait uniformément. Examinons le *cas où il décrit une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré.*

En prenant toujours cette droite pour axe des x, on a

$$\beta = 0, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \text{const.} = k.$$

Par suite, l'équation (4) se réduit à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{l}\sin\theta = 0.$$

Il en résulte que le fil Am oscille de part et d'autre de l'axe ox, comme un pendule simple de longueur l, dans lequel la force de grandeur et de direction constante qui remplace la gravité, serait égale à k.

Le principe des mouvements relatifs permettait encore de prévoir ce résultat, puisqu'ici la force qu'il faut appliquer à m, pour avoir son mouvement relatif autour de A, est une force k constante en grandeur et en direction : le point m oscillera donc autour de A, comme un pendule simple.

Le mouvement du point m se ramène encore à celui du pendule simple, dans le *cas où le point* A *est assujetti à décrire un cercle d'un mouvement uniforme.*

Soient R le rayon oA (*fig.* 56) et ω la vitesse constante avec laquelle ce rayon tourne autour du centre o, pris pour origine des coordonnées ; on a

$$\alpha = R\cos\omega t, \quad \beta = R\sin\omega t.$$

Par suite, on tire des équations (2) les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, en fonction de θ et de t; et en les substituant dans l'équation (4) on a

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} - R\omega^2\sin(\theta + \omega t) = 0.$$

Si l'on pose $\theta + \omega t = \varphi$ (φ désigne l'angle du fil m A avec le rayon o A), l'équation précédente devient

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} - R\,\omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Elle exprime que le fil A m oscille autour du rayon o A, comme un pendule simple de longueur l, soumis à une force R ω^2, de direction constante.

2°. $R = \infty$: *le frottement est supposé infini.*

Cela revient à supposer que le mouvement du point m ait lieu par une suite de chocs instantanés imprimés dans la direction du fil m A, et que la vitesse acquise soit incessamment détruite par la résistance du plan.

Le point m décrit alors une courbe dont la tangente coïncide, à chaque instant, avec la direction même du fil moteur.

Cette première conséquence est mise en évidence par l'équation (3), qui se réduit à

$$(5) \qquad \sin\theta \frac{dx}{ds} + \cos\theta \frac{dy}{ds} = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\theta.$$

La courbe ainsi décrite se nomme *tractoire*.

La détermination de la *tractoire* est un problème de pure géométrie.

Le point A étant assujetti à décrire une courbe donnée $f(x, y) = 0$, on aura, entre α et β, la relation

$$(6) \qquad f(\alpha, \beta) = 0;$$

puis, si l'on pose $\frac{dy}{dx} = p$, on a

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2}};$$

ces valeurs substituées dans les équations (2) donnent

$$(7) \qquad x - \alpha = \frac{-l}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y - \beta = \frac{-lp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

L'élimination de α et β entre les équations (6) et (7) fournira, entre x, y et p, l'équation différentielle de la courbe cherchée.

On pourra, dans certains cas, diriger avec avantage le calcul de la manière suivante :

Les équations (7) donnent

$$d\alpha = dx - \frac{lpdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad d\beta = pdx + \frac{ldp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

(8) $$d\beta - pd\alpha = \frac{ldp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Comme β est une fonction connue $\varphi(\alpha)$, on a

$$d\beta = \varphi'(\alpha)\,d\alpha;$$

et substituant dans l'équation (8), on a une équation du premier ordre entre p et α,

$$\sqrt{1+p^2}\,[\varphi'(\alpha) - p]\,d\alpha - ldp = 0,$$

dont on peut faire disparaître l'irrationnelle en posant

$$\sqrt{1+p^2} = z - p, \quad \text{d'où} \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dz}{z}, \quad p = \frac{z^2-1}{2z};$$

l'équation différentielle devient

$$l\frac{dz}{d\alpha} - \varphi'(\alpha)\,z + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

C'est l'*équation d'Euler*. On sait l'intégrer, généralement, toutes les fois qu'on en connaît une intégrale particulière; car alors on la ramène à l'équation linéaire.

Lorsque z et par suite p sont connus en fonction de α, le reste du calcul s'achève sans difficulté.

Examinons d'abord le *cas où le point* A *décrit une ligne droite* ox (fig. 57).

On a $\beta = 0$, et la seconde des équations (7) fournit immédiatement l'équation différentielle de la tractoire

(9) $$y = \frac{-lp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Avant de chercher l'intégrale entre y et x, on peut obtenir une relation très-simple entre l'arc s et l'ordonnée y, en remplaçant $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ par son égal $\frac{dy}{ds}$; l'équation devient

(10) $$y = -l\frac{dy}{ds},$$

d'où l'on tire

$$y = le^{-\frac{s}{l}},$$

en prenant pour origine des arcs le point B dont l'ordonnée $y = l$.

Cette équation montre que la tractoire est asymptote à la directrice ox; car $s = \infty$ donne $y = 0$. Elle touche d'ailleurs en B l'axe oy.

L'analogie de l'équation (10) avec celle qui a lieu entre l'ordonnée d'une chaînette de paramètre l, et l'arc compté à partir du point le plus bas, nous conduit à rechercher dans cette courbe une propriété de la tractoire : si l'on considère une chaînette LCL′ (*fig.* 58), ayant pour équation

$$Y = \frac{l}{2}\left(e^{\frac{X}{l}} + e^{-\frac{X}{l}}\right),$$

on sait qu'on en déduit

$$Y = l\frac{ds}{dX}, \quad s = l\frac{dY}{dX}, \quad \text{et, par suite,} \quad s = \frac{YdY}{ds};$$

or, si du pied R de l'ordonnée mR, on abaisse une perpendiculaire sur la tangente mT, on a

$$mT = Y\frac{dY}{ds}, \quad \text{donc} \quad mT = s \quad \text{et} \quad TR = \sqrt{Y^2 - s^2} = l.$$

Ainsi la courbe CTV, lieu des points T, est une développante de la chaînette, et de plus la tangente à cette développante, dont la direction n'est autre que celle de la perpendiculaire TR, est telle, que la portion comprise entre le point de contact et l'axe ox est constamment égale à l. Si l'on transportait la chaînette sur la figure précédente, de manière que son axe prît la direction oy, et que son sommet C coïncidât avec B, les deux courbes CTV, BmU coïncideraient.

La tractoire est donc une développante de la chaînette, dont le paramètre est la longueur constante du fil moteur.

On déduit de là une construction fort simple du rayon de courbure de la tractoire. En effet, il suffit d'élever au point A une perpendiculaire à l'axe ox, et le point D où cette droite rencontre une perpendiculaire élevée en m sur mA, est le centre de courbure correspondant au point m. Les triangles semblables DmS, AmS donnent ensuite

$$m\text{D} : m\text{A} :: m\text{S} : \text{AS}, \qquad \text{d'où} \qquad m\text{D} = l\sqrt{\frac{l^2}{y^2} - 1}.$$

Telle est la longueur du rayon de courbure.

La longueur de la normale mN s'en déduit; car le triangle DNA donne

$$m\text{D}.m\text{N} = \overline{m\text{A}}^2 = l^2.$$

On peut remarquer aussi qu'entre les ordonnées correspondantes mP, DA de la tractoire et de la chaînette, on a la relation $\text{Y}y = l^2$.

Revenons à l'équation (9); on en tire

$$dx = \frac{-dy\sqrt{l^2 - y^2}}{y},$$

et si l'on pose $\sqrt{l^2 - y^2} = z$, on a $dx = -dz + \frac{l^2 dz}{l^2 - z^2}$:

d'où $x = -z + \frac{l}{2}\log\left(\frac{l+z}{l-z}\right)$, ou

$$x = l.\log\left(\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{l^2-y^2}.$$

(La caractéristique log désigne ici des logarithmes népériens.)

Telle est l'équation de la tractoire BmU.

L'équation différentielle $ydx = -\sqrt{l^2-y^2}dy$ manifeste une propriété remarquable de l'aire de la tractoire, c'est qu'elle est réductible à l'aire du cercle. En effet, on a

$$\int_0^x ydx = -\int_l^y \sqrt{l^2-y^2}\,dy = \int_y^l \sqrt{l^2-y^2}\,dy.$$

Donc, si l'on décrit de o comme centre, avec oB ou l pour rayon, un quart de cercle BLHE, l'aire BmPo de la tractoire sera équivalente au segment circulaire BLHI, et l'aire asymptotique Bmxo aura pour mesure le quart de cercle ou $\frac{\pi l^2}{4}$.

Comparons entre eux les chemins parcourus simultanément par les points m et A. On a déjà $ds = -l\frac{dy}{y}$; puis, comme $\alpha = x + \sqrt{l^2-y^2}$, on en tire

$$d\alpha = dx - \frac{ydy}{\sqrt{l^2-y^2}} = \frac{-dy\sqrt{l^2-y^2}}{y} - \frac{ydy}{\sqrt{l^2-y^2}} = \frac{-l^2dy}{y\sqrt{l^2-y^2}}.$$

Donc

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{l^2-y^2}}{l} = \cos\theta, \quad \text{ou} \quad v = b\cos\theta,$$

b désignant la vitesse constante ou variable du point A, et v celle du point m : ainsi la vitesse du point m sur la tractoire est, à chaque instant, la projection sur sa propre direction de la vitesse du point A.

Dans le cas où le mouvement du point A est uniforme, b est constante, et si l'on compte le temps à partir du

point B, pour lequel $x = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$x = bt - l\cos\theta, \quad y = l\sin\theta,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = b + l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (5), donnent

$$(11) \qquad l\frac{d\theta}{dt} + b\sin\theta = 0,$$

d'où

$$\tang\frac{1}{2}\theta = e^{-\frac{bt}{l}};$$

θ étant connu en fonction du temps, on connaîtra aussi y par la formule $y = l\sin\theta$, d'où

$$y = \frac{2l}{e^{\frac{bt}{l}} + e^{-\frac{bt}{l}}},$$

et par suite, on pourra assigner à chaque instant la position du mobile sur sa trajectoire. Enfin, si l'on demande quelle serait la force accélératrice R capable de faire décrire la tractoire au point m supposé libre, on tirera des équations ci-dessus,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2b^2}{l}\sin^2\theta\cos\theta, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{b^2}{l}\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

d'où $$R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \frac{b^2}{l}\sin\theta = \frac{b^2y}{l^2}.$$

Cette force décroît proportionnellement à la distance du point m à la directrice, et sa direction fait avec l'axe des y positives un angle égal à 2θ. Comme la tangente à la tractoire fait avec le même axe un angle $\frac{\pi}{2} + \theta$, on voit que ces deux directions ne coïncident qu'au point de départ B

pour lequel $\theta = \frac{\pi}{2}$, et l'angle qu'elles font entre elles est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Pour terminer, nous analyserons brièvement le cas traité par Euler, *où la courbe décrite par le point* A *est un cercle:* alors, dit Euler, *singulari fortunâ evenit ut tractoria definiri possit.*

Nous emploierons les coordonnées polaires $om = r$, $mo\text{A} = \theta$ (*fig.* 59). Soient

$$m\text{T} = l, \quad o\text{T} = a, \quad \text{T}mo = \varphi;$$

puisque mT est tangente à la tractoire, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{rd\theta}{dr}; \quad \text{d'ailleurs,} \quad a^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\varphi.$$

En éliminant r entre ces deux équations, on exprimera aisément θ en fonction de φ par une quadrature. A cet effet, on différentie la seconde équation, ce qui donne

$$\frac{dr}{r} = \frac{-l\sin\varphi\,d\varphi}{r - l\cos\varphi}; \quad \text{or} \quad r - l\cos\varphi = \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi},$$

donc

$$\frac{dr}{r} = \frac{-l\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}},$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{l\sin\varphi\operatorname{tang}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on pose $\sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi} = z\sin\varphi$, il vient

$$d\theta = \frac{l}{z}\cdot\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{l\,dz}{l^2 + z^2} - \frac{l\,dz}{l^2 - a^2 + z^2},$$

d'où

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{l} - l\int\frac{dz}{l^2 - a^2 + z^2} + \text{const.}$$

La dernière intégrale offre trois cas à distinguer :

1°. Si $l > a$, on a

$$\int \frac{dz}{l^2 - a^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{\sqrt{l^2 - a^2}},$$

et par conséquent, si l'on rétablit la variable φ, on a

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin\varphi \sqrt{l^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - l^2 \sin^2\varphi}} - \operatorname{arc\,tang} \frac{l \sin\varphi}{\sqrt{a^2 - l^2 \sin^2\varphi}}.$$

La constante arbitraire a été déterminée par la condition que pour $\theta = 0$, on ait $\varphi = 0$, c'est-à-dire qu'à l'origine le fil AB soit dans la direction prolongée du rayon oA.

L'angle φ ne saurait dépasser la valeur pour laquelle $\sin\varphi = \frac{a}{l}$; alors $r = \sqrt{l^2 - a^2}$, et l'angle au centre moT est droit.

θ et r étant exprimés en fonction de φ, on peut regarder le problème comme résolu.

2°. Si $l < a$, on a

$$\int \frac{dz}{l^2 - a^2 + z^2} = \frac{l}{2\sqrt{a^2 - l^2}} \log \frac{x - \sqrt{a^2 - l^2}}{x + \sqrt{a^2 - l^2}}, \text{ etc.}$$

3°. Si $l = a$, on a directement

$$d\theta = \operatorname{tang}^2\varphi \, d\varphi,$$

d'où $\theta = \operatorname{tang}\varphi - \varphi$, et $r = 2l\cos\varphi$.

A l'origine, $\theta = 0$, $\varphi = 0$, et r a sa plus grande valeur $2l$; θ allant en croissant, φ augmente continuellement puisque $\frac{d\varphi}{d\theta}$ est positif; mais φ ne peut dépasser ni même atteindre $\frac{\pi}{2}$, auquel cas $r = 0$, et $\theta = \infty$. Ainsi, tandis que le fil fait une infinité de circonvolutions autour du cercle, le point mobile m s'approche indéfiniment du centre, qui est un point asymptote de la tractoire.

2. Nous rapprocherons de l'étude de la tractoire, celle d'une courbe analogue qui a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres. (Consulter les *Annales de Gergonne*,

tome XIII, solutions de MM. Sturm, Querret et Thomas de Saint-Laurent.)

La ligne de poursuite est décrite dans les circonstances suivantes :

On suppose qu'un chien se dirige avec un effort constant vers l'endroit où est son maître, qui, de son côté, parcourt uniformément une ligne droite ; mais une résistance d'intensité constante et parallèle à la route que suit le maître détourne sans cesse le chien de la direction qu'il tend à prendre. (C'est ce qui a lieu, par exemple, si le chien nage dans un canal dont le bord rectiligne est parcouru par le maître ; le courant fait dévier le chien de la direction qu'il veut prendre, en l'entraînant parallèlement au bord du canal, soit dans le sens de la marche du maître, soit en sens contraire.) *On demande la courbe que décrit le chien, la distance qui le sépare à chaque instant de son maître, sa vitesse*, etc.

Soient oB (*fig.* 60) la droite que parcourt le maître ; B sa position au bout du temps t ; m celle du chien ; g la vitesse du maître ; h la vitesse également constante avec laquelle le courant entraînerait le chien s'il s'y abandonnait : h sera positive dans le sens mR, et négative dans le sens opposé ; k la vitesse constante qui résulterait de l'effort fait par le chien dans le sens mB, et avec laquelle il marcherait de m vers B, si le courant n'existait pas.

D'après le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, il est facile de ramener la question au cas où le mouvement du chien aurait lieu dans un fluide stagnant qui ne lui opposerait aucune déviation. A cet effet, il suffit de concevoir que le canal et le terrain sur lequel il est situé soient entraînés d'un mouvement commun, dans le sens du courant et avec la vitesse h, sur un plan fixe, et que le maître marche sur ce terrain mobile avec une vitesse égale à $g-h$, tandis que le chien se dirigera vers lui avec la vitesse k. On déterminera la trajectoire ainsi décrite en

la rapportant à deux axes rectangulaires tracés dans le plan mobile; ensuite on passera aisément des coordonnées relatives à ces axes, aux coordonnées relatives à deux axes tracés dans le plan fixe sur lequel tout le système est censé glisser. Éclaircissons ce dernier point.

Prenons pour axe des y la droite parcourue par le maître, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée sur cette droite du point de départ A du chien. Soit $o\mathrm{A} = a$; comptons le temps t et l'arc s décrit par le chien, à partir de l'instant où il était en A, en sorte que l'on ait à la fois

$$t = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad s = 0.$$

Au bout du temps t, soient X, Y les coordonnées du point m où se trouve le chien, relatives à deux axes fixes; x, y ses coordonnées relatives aux deux axes mobiles avec le plan de la trajectoire, et qui, à l'origine du temps, coïncidaient avec les axes fixes. L'axe des y ne cesse pas de coïncider avec celui des Y; mais l'axe des x s'est transporté parallèlement à lui-même de la quantité $(\mathrm{Y}-y)$ avec la vitesse h, tandis que le point m décrit sur le plan mobile l'arc s avec la vitesse k; on aura donc

$$(1) \qquad \mathrm{X} = x, \quad \frac{\mathrm{Y}-y}{s} = \frac{h}{k}.$$

La question est ramenée à déterminer, s'il est possible, y et s en fonction de x; et l'on s'est affranchi de la déviation causée par le courant.

Actuellement, la droite mobile $m\mathrm{B}$ doit être, comme dans le problème de la tractoire, considérée comme tangente à la courbe Am; seulement, la longueur $m\mathrm{B}$ n'est pas constante.

En désignant $o\mathrm{B}$ par y_1, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-y_1}{x}; \qquad \text{soit} \quad \frac{g-h}{k} = n;$$

n sera le rapport de la vitesse du maître à celle du chien,

sur le plan mobile, et comme ce rapport est celui des éléments dy_1 et ds, on aura

$$dy_1 = nds = -ndx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

L'élimination de y_1 entre les deux équations ci-dessus fournira l'équation différentielle de la courbe décrite sur le plan mobile; en posant $\frac{dy}{dx} = p$, on trouve

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = n\frac{dx}{x},$$

et intégrant, on a

$$p + \sqrt{1+p^2} = (cx)^n.$$

Déterminons la constante arbitraire c. Comme la largeur du canal n'entre pour rien dans les calculs précédents, on peut la supposer indéfinie du côté où se meut le chien, et regarder celui-ci comme nageant depuis un temps illimité. D'après cela, le point A, pris arbitrairement comme point de départ, peut être supposé tel, que la droite qui joint le chien à son maître soit alors perpendiculaire à oy : ainsi, quand le chien est en A, le maître sera o, et l'on aura en même temps

$$x = a, \quad p = 0, \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{a};$$

par suite

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{x}\right)^n\right].$$

Une deuxième intégration donne

$$(2) \quad y = \frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right] + \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right]\right\};$$

puis, comme

$$s = \int -dx\sqrt{1+p^2} = -\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{a}{x}\right)^n\right]dx,$$

il vient

$$(3) \quad s = -\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right] - \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right]\right\}.$$

Ces formules sont en défaut pour $n=1$. Dans ce cas, on a

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right),$$

d'où

$$(4)\qquad y=\frac{x^2}{4a}-\frac{a}{4}-\frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$(5)\qquad s=-\frac{x^2}{4a}+\frac{a}{4}-\frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Connaissant y et s en fonction de x, on aura, par les formules (1),

$$(6)\quad \frac{2kY}{a}=\frac{k-h}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{k+h}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right];$$

et si $n=1$,

$$(7)\qquad \frac{2kY}{a}=\frac{k-h}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2}-1\right]-(k+h)\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Discutons d'abord le *cas où* $h=0$, c'est-à-dire où le chien se dirige sans déviation, comme il le ferait sur un terrain solide, vers le lieu où il voit son maître; alors Y se confond avec y, et la trajectoire est définie par les formules (2) ou (4), selon que n est différent de 1, ou égal à 1.

Si n diffère de 1, la trajectoire sera toujours une courbe algébrique; on la construira au moyen de deux courbes auxiliaires, en posant

$$u=\frac{a}{2(n+1)}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right],\quad v=\frac{a}{2(n-1)}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right];$$

car

$$y=u+v.$$

On pourra même faire disparaître les termes constants que u et v renferment, en transportant l'origine au point de l'axe des y, pour lequel $y=-\frac{an}{n^2-1}$; car alors l'expression générale de y se réduit à

$$y=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right].$$

Soit r la distance mB du chien à son maître ; on aura, par le triangle mBQ, $r = x\sqrt{1+p^2}$, ou

$$(8)\qquad r=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{x}\right)^n\right]=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right].$$

Cette distance ne pourra devenir nulle avec x, qu'autant que n sera plus petit que 1.

Il existe une relation remarquable entre r, x et le rayon de courbure ρ ; on a

$$\rho=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}};\quad \text{or}\quad \frac{dp}{dx}=\frac{n\sqrt{1+p^2}}{x};\quad \text{donc}\quad \rho=\frac{(1+p^2)x}{n},$$

ou bien

$$\rho=\frac{r^2}{nx}.$$

Ainsi le rayon de courbure de la trajectoire est une troisième proportionnelle à la distance du chien à son maître, et au produit de la distance du chien à la droite que parcourt le maître multipliée par le rapport des vitesses. Ce théorème fournit une construction simple du rayon de courbure en un point donné de la courbe.

On doit remarquer que ces résultats n'exigent pas que les vitesses du maître et du chien soient constantes, mais seulement qu'il existe entre elles un rapport constant.

Quand la vitesse du chien est une constante donnée k, on a

$$s=kt,$$

et comme s est connu en fonction de x, on en conclut l'expression du temps en fonction de la même variable,

$$(9)\qquad \frac{2kt}{a}=\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]-\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right].$$

Soit, comme *cas particulier*, $n=\frac{1}{2}$, ou *la vitesse du maître moitié de celle du chien* (fig. 61).

Si l'on transporte l'origine au point o' de l'axe oy, pour lequel $y = \frac{2}{3}a$, il vient

(2) $$y = a\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \pm a\sqrt{\frac{x}{a}}\left[\frac{x}{3a} - 1\right],$$

(3) $$s = \frac{4}{3}a - a\sqrt{\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{3a} - 1\right).$$

Ces équations sont faciles à discuter sans recourir aux fonctions u et v.

La trajectoire est symétrique par rapport au nouvel axe $o'x'$, et située tout entière à droite de oy ; l'origine o' est un sommet. Pour $x = a$, on a $y = \pm\frac{2}{3}a$, ce qui donne deux points A, A', pour lesquels l'ordonnée est maximum. Pour $x = 3a$, on a $y = 0$, $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$: les deux branches qui partent du sommet o' se croisent sur cet axe à une distance $3a$, en faisant avec lui des angles de 30 degrés ; au delà de ce point, elles s'étendent à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe. Pour $x = 0$, les formules (2) et (3) donnent $y = 0$, $s = \frac{4}{3}a$.

L'arc Ao', parcouru par le chien jusqu'à la rencontre de son maître, est la seule partie de cette courbe qui convienne au problème de dynamique. Cet arc est égal à la distance initiale oA augmentée d'un tiers, et pendant le temps employé par le chien à décrire cet arc, le maître a parcouru les deux tiers de cette même distance.

Soit, en second lieu, $n = 1$, c'est-à-dire, *la vitesse du maître égale à celle du chien* (fig. 62).

Si l'on transporte l'origine dans le sens des y négatives, de la quantité $\frac{a}{4}$, la formule (4) devient

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right), \text{ ou } y = \frac{x^2}{4a} + \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{x}\right).$$

Ce cas est le seul où la trajectoire soit une courbe transcendante.

On la construira à l'aide d'une parabole $\left(u = \frac{x^2}{4a}\right)$ et d'une logarithmique $\left[v = \frac{a}{2} \mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$; elle est entièrement située dans l'angle des coordonnées positives $yo'x'$, attendu que l'on a toujours

$$\frac{x^2}{4a} > \frac{a}{2} \mathrm{l} \frac{x}{a}, \quad \text{ou} \quad e^{\left(\frac{x}{a}\right)^2} > \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

et elle se compose de deux branches infinies, convexes vers l'axe des x, dont l'une AD a pour asymptote l'axe des y; l'autre AD' n'a pas d'asymptote rectiligne, puisque $\frac{dy}{dx}$ croît indéfiniment avec x; l'ordonnée AP est minimum; la distance mB ou $r = \frac{a}{2}\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$; r décroît avec x, et tend vers la limite $\frac{a}{2}$. Ainsi le chien se rapprochera de plus en plus de son maître, sans que la distance qui les sépare soit jamais nulle, ni même égale à la moitié de sa valeur primitive.

Le rayon de courbure $\rho = \frac{r^2}{x}$. Pour le construire, on prendra sur la normale une longueur $m\mathrm{S} = m\mathrm{Q} = x$, on joindra SB, et la perpendiculaire BC à cette dernière droite ira couper la normale au centre de courbure.

Revenons au cas général où le chien est dévié par un courant. La trajectoire est définie, comme on l'a vu, par l'équation

$$(6) \quad \frac{2k\mathrm{Y}}{a} = \frac{k-h}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right] + \frac{k+h}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right],$$

et le temps s'exprime en fonction de l'abscisse $\mathrm{X} = x$ par

l'équation

$$(9)\qquad \frac{2kt}{a} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right] - \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Il n'y a rien à changer non plus à l'expression de la distance r,

$$(8)\qquad r = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right].$$

Enfin, pour avoir la vitesse v du chien, qui répond à une valeur quelconque de x, on remarquera que cette vitesse est la résultante des deux vitesses h et k, dont la première est dirigée suivant une parallèle à l'axe des y, et dont la seconde fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est la valeur de p déjà connue,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n} - \left(\frac{a}{x}\right)^{n}\right].$$

Soit φ l'angle de ces deux composantes; on aura

$$v^2 = h^2 + k^2 + 2hk\cos\varphi;$$

or,

$$\cos\varphi = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2}},$$

ou

$$\cos\varphi = \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{n} - \left(\frac{x}{a}\right)^{n}}{\left(\frac{x}{a}\right)^{n} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n}};$$

donc

$$(10)\qquad v^2 = \frac{(k-h)^2\left(\frac{x}{a}\right)^{n} + (k+h)^2\left(\frac{a}{x}\right)^{n}}{\left(\frac{x}{a}\right)^{n} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n}}.$$

Lorsque $n = 1$, ces formules doivent être modifiées comme on l'a déjà dit. La trajectoire est alors une courbe transcendante définie par l'équation (7).

Nota. On aurait pu établir toutes les formules ci-dessus sans ramener le problème au cas où la déviation est nulle,

en décomposant, selon les règles ordinaires, les vitesses k et h parallèlement aux axes coordonnés; on aurait eu ainsi pour équations différentielles du mouvement du chien,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{\sqrt{x^2+(y-gt)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = h - \frac{k(y-gt)}{\sqrt{x^2+(y-gt)^2}}.$$

Elles s'intègrent commodément, en introduisant une variable auxiliaire θ telle que

$$y - gt = x \operatorname{tang} \theta,$$

et l'on est ramené à un système d'équations simultanées tout semblable à celui que nous avons traité dans la seconde partie.

Une des applications les plus intéressantes des formules ci-dessus a trait au *sillage d'une barque qui, partant de l'un des bords* A *d'une rivière dont la largeur est a, tend sans cesse vers le point directement opposé o de l'autre bord* (fig. 63).

Alors $g = 0$, et $n = -\frac{h}{k}$; les équations (6) et (9) deviennent

$$(11) \qquad \frac{2Y}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{h}{k}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{h}{k}},$$

$$(12) \qquad \frac{2t}{a} = \frac{2k}{k^2-h^2} - \frac{1}{k+h}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{h}{k}} - \frac{1}{k-h}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{h}{k}}.$$

Pour que le point fixe vers lequel tend la barque, et qui n'est autre que l'origine o des coordonnées, puisse être atteint, il faut et il suffit que l'équation précédente soit vérifiée par $x = 0$, $y = 0$; et pour cela on doit avoir $k > h$, c'est-à-dire que l'impulsion imprimée par les rames doit être supérieure à celle du courant.

En supposant cette condition remplie, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de l'équation (11), s'annule pour $x = a\left(\frac{k-h}{k+h}\right)^{\frac{k}{2h}}$.

Au point C, déterminé par cette abscisse, la barque est dirigée perpendiculairement au courant, et sa distance à la droite qui joint le point de départ A au point d'arrivée, est maximum.

Soit par exemple $k = 2h$; on aura au point C, $x = \frac{a}{3}$, d'où $y = \frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Au point d'arrivée, $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$; au point de départ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{h}{k}$.

Le temps T, nécessaire pour traverser la rivière, est, d'après la formule (12), $T = \frac{ak}{k^2 - h^2}$.

Si l'eau était stagnante ($h = 0$), l'équation (11) se réduirait à $Y = 0$; la barque suivrait en effet la droite oA. Le temps nécessaire à la traversée serait $\frac{a}{k} < T$; ainsi que cela devait être, le retard croît avec la vitesse du courant.

Lorsque $k = h$, l'équation (11) se réduit à

$$x^2 = 2a\left(\frac{a}{2} - y\right).$$

Elle représente une parabole dont le foyer est à l'origine, et le sommet au point où elle coupe le bord oy; l'ordonnée de ce point est $\frac{a}{2}$. Ainsi, quand la force d'impulsion des rames est égale à celle du courant, la barque n'atteint pas le bord au point désigné; mais elle aborde à un point en aval, distant du premier de la moitié de la largeur de la rivière.

CHAPITRE II.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT ASSUJETTI A DÉCRIRE UNE COURBE FIXE : VARIÉTÉS DU PENDULE SIMPLE.

1. *Un point matériel pesant est suspendu à un point fixe par un fil flexible, inextensible et sans masse, qui se meut dans un plan vertical en s'enroulant sur une courbe fixe telle, que la tension du fil soit constante : cette courbe passe par le point de tension où elle a pour tangente la verticale. On donne la longueur du fil et la vitesse du pendule au point le plus bas :* il s'agit de *déterminer la loi du mouvement et la forme de la courbe fixe.* (Concours d'agrégation de 1845.)

Soient l la longueur oA du fil (*fig*. 64), λ la tension constante. Quand le pendule a la position quelconque omm', la tension est égale à la somme de la force centrifuge $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ et de la composante normale de la pesanteur $\left(g\frac{dy}{ds}\right)$; on a donc

$$(1) \qquad \lambda = \frac{v^2}{\rho} + g\frac{dy}{ds};$$

s désigne l'arc om de la courbe fixe; x et y sont les coordonnées du point m.

Le rayon de courbure ρ est égal à la partie rectiligne mm' du fil, attendu que la trajectoire Am' est une développante de la courbe fixe; donc

$$\rho = l - s.$$

Soit k la vitesse donnée du pendule au point le plus bas A,

le principe des forces vives donne pour l'expression du carré de la vitesse v au point m' (x', y'),

$$v^2 = k^2 + 2g(y' - l).$$

Or

$$y' = y + m'\mathrm{P} = y + (l - s)\frac{dy}{ds};$$

donc

$$v^2 = k^2 + 2g\left[y - l + (l - s)\frac{dy}{ds}\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\lambda = g\frac{dy}{ds} + \frac{k^2 + 2g\left[y - l + (l - s)\frac{dy}{ds}\right]}{l - s}.$$

L'intégrale de cette équation, linéaire du premier ordre, est

$$(2) \qquad y = -\frac{\lambda}{g}(l - s) + c(l - s)^{\frac{2}{3}} - \frac{k^2 - 2gl}{2g}.$$

Telle est la relation générale qui existe entre l'ordonnée verticale y et l'arc s de la courbe fixe compté à partir du point de suspension.

La constante λ est connue d'après l'état du pendule au point le plus bas; car l'équation (1) donne pour ce point

$$\lambda = g + \frac{k^2}{l};$$

si dans l'équation (2) on fait $y = 0$, $s = 0$, et qu'on remplace λ par la valeur ci-dessus, on en tirera la valeur de la constante arbitraire c,

$$c = \frac{3k^2 l^{-\frac{2}{3}}}{2g}.$$

Actuellement, on aura aisément v^2 en fonction de s par la formule

$$v^2 = (l - s)\left(\lambda - g\frac{dy}{ds}\right) = k^2\left(\frac{l - s}{l}\right)^{\frac{2}{3}};$$

on voit que la vitesse va continuellement en décroissant à mesure que l'arc augmente.

Le mouvement peut-il être oscillatoire? Il faudrait pour cela que v pût devenir nulle, ce qui ne saurait avoir lieu que pour une valeur de s égale à l : mais cela est inadmissible, puisqu'on a

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\lambda}{g} - \frac{2}{3} c (l - s)^{-\frac{1}{3}};$$

l'hypothèse $s = l$ donnerait $\frac{dy}{ds} = -\infty$.

Ainsi le mouvement du pendule ne sera pas oscillatoire. On reconnaît encore d'une autre manière que la vitesse ne saurait devenir nulle à aucune époque du mouvement : en effet, la vitesse devenant nulle, la tension du fil se réduirait à la composante normale de la pesanteur $g \cos \theta$, θ désignant l'angle de la partie rectiligne du fil avec la verticale; mais cette tension serait visiblement moindre que celle qui a lieu au point le plus bas et qui est égale à $\left(g + \frac{k^2}{l}\right)$, et, par suite, la condition du problème qui exige l'invariabilité de la tension ne serait plus remplie.

La valeur précédente de $\frac{dy}{ds}$ peut s'écrire

$$\frac{dy}{ds} = 1 - \frac{k^2}{gl} \left[\left(\frac{l}{l - s} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right].$$

Au point o, $s = 0$, et l'on trouve $\frac{dy}{ds} = 1$; effectivement, en ce point la tangente est verticale. s augmentant, $\frac{dy}{ds}$ diminue et devient nul quand on a

$$\frac{l - s}{l} = \left(\frac{k^2}{k^2 + gl} \right)^3,$$

d'où l'on tire une valeur de s plus petite que l, et, par con-

séquent, admissible. Au point correspondant, la partie libre du fil est horizontale, et la vitesse du mobile est égale à

$$\left(k \cdot \frac{k^2}{k^2 + gl}\right).$$

s continuant à croître, $\frac{dy}{ds}$ devient négatif et atteint son minimum (-1) pour

$$\frac{l-s}{l} = \left(\frac{k^2}{k^2 + 2gl}\right)^3;$$

la vitesse correspondante est

$$\left(k \cdot \frac{k^2}{k^2 + 2gl}\right):$$

c'est la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir. Le pendule est alors vertical, le point matériel en haut. Au delà de cette position, il n'est plus possible de déterminer la courbe propre à remplir les conditions de l'énoncé, puisque $\frac{dy}{ds}$ prendrait des valeurs absolues plus grandes que 1.

Pour achever de déterminer la courbe fixe, il resterait à déduire de l'équation (2) l'équation finie de cette courbe en x et y. Mais il est préférable de chercher la trajectoire A m', qui est une développante de la courbe fixe. On passe ensuite aisément, par voie de différentiation et d'élimination, de la développante à la développée. Suivons cette nouvelle marche.

La tangente au point m' étant perpendiculaire à la tangente en m, on a

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx'}{ds'},$$

et l'équation (1) prend la forme

$$\lambda = g\,\frac{dx'}{ds'} + \frac{k^2 + 2g\,(y' - l)}{\rho}.$$

Soit $\frac{dx'}{dy'} = p$; on a $\rho = \frac{-(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dy'}}$.

(Nous prenons le signe — au numérateur, parce que la trajectoire est concave vers l'axe des y, et qu'ainsi $\frac{dp}{dy'}$ est négatif.) L'équation précédente devient, en y substituant ces valeurs,

$$\lambda = \frac{gp}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{k^2 + 2g(y'-l)}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dy'};$$

les variables se séparent :

$$\frac{dy'}{k^2 + 2g(y'-l)} = \frac{dp}{(1+p^2)(gp - \lambda\sqrt{1+p^2})}.$$

On vérifie que la valeur de $\frac{dp}{dy'}$ qui satisfait à cette équation est négative; en effet, $k^2 + 2g(y'-l)$ est une quantité essentiellement positive, égale au carré de la vitesse v, et le facteur $gp - \lambda\sqrt{1+p^2}$ est au contraire négatif, puisque λ, dont la valeur est $g + \frac{k^2}{l}$, surpasse g.

Pour intégrer, il convient de poser

$$p = \operatorname{tang}\omega, \quad \text{d'où} \quad \frac{dp}{1+p^2} = d\omega \quad \text{et} \quad \sqrt{1+p^2} = -\frac{1}{\cos\omega};$$

il vient

$$\frac{dy'}{k^2 + 2g(y'-l)} = \frac{\cos\omega\, d\omega}{g\sin\omega + \lambda}:$$

l'intégration donne

$$(g\sin\omega + \lambda)^2 = c^2[k^2 + 2g(y'-l)],$$

c étant une constante arbitraire.

On tire de cette équation la valeur de $g \sin \omega$, et, par suite, celle de $p = \frac{g \sin \omega}{\sqrt{g^2 - g^2 \sin^2 \omega}}$.

Or $p = \frac{dx'}{dy'}$; donc

$$dx' = \frac{\left[c\sqrt{k^2 + 2g(y' - l)} - \lambda\right] dy'}{\sqrt{g^2 - \left[c\sqrt{k^2 + 2g(y' - l)} - \lambda\right]^2}},$$

ou, en posant $\sqrt{k^2 + 2g(y' - l)} = z$,

$$g\,dx' = \frac{(cz - \lambda)\,z\,dz}{\sqrt{g^2 - (cz - \lambda)^2}}.$$

Ainsi la détermination de la trajectoire est ramenée à une quadrature qu'on achèvera par la méthode des fractions rationnelles.

2. *Déterminer le mouvement d'un point matériel pesant, suspendu à un fil flexible, inextensible et sans masse, dont l'autre extrémité est attachée à la gorge d'une poulie fixe : ce pendule est mis en mouvement dans le plan du cercle de gorge qu'on suppose vertical, et dont la circonférence est en partie embrassée par le fil.*

Le pendule étant en équilibre dans la position verticale DH (*fig.* 65), supposons qu'on l'en ait écarté en l'amenant dans la direction AB, et qu'on ait en même temps imprimé une vitesse k au point matériel; soit Cm la position du pendule au bout du temps t. La trajectoire décrite par le point m est connue, car c'est une développante du cercle oA; et l'arc Hm, compté à partir du point le plus bas H, s'exprime aisément en fonction de l'angle CoD que fait avec l'horizon le rayon mobile aboutissant au point où le fil se sépare tangentiellement du cercle.

Soit $Hm = s$, $Cm = \rho$, $CoD = \theta$, $oA = a$, $DH = b$;

lorsque l'arc s prend un accroissement infiniment petit ds,

l'accroissement correspondant $d\theta$ est égal à l'angle de contingence de la trajectoire, relatif au point m, puisque le rayon oC est constamment perpendiculaire au rayon de courbure Cm ; on a donc

$$ds = \rho\, d\theta.$$

Mais
$$\rho = \text{DH} + \text{arc DC} = b + a\theta,$$

donc
$$ds = (a\theta + b)\, d\theta,$$

et
$$s = \frac{a\theta^2}{2} + b\theta.$$

Si l'on prend pour axe des x l'horizontale $o\text{D}x$, et pour axe des y la verticale oP dirigée dans le sens de la pesanteur, on tirera de l'équation précédente celle de la trajectoire rapportée à ces axes. Ce calcul a été fait (page 77); nous ne le rapporterons pas.

Cherchons à déterminer le lieu du point m sur sa trajectoire, au bout du temps t. Le principe des forces vives donne l'équation

$$(1)\qquad \frac{ds}{dt} = -\sqrt{k^2 + 2g(y - h)},$$

y et h désignant les ordonnées des points m et B.

Pour en déduire θ en fonction de t, il faut y remplacer s et y en fonction de θ ; nous avons déjà

$$ds = (a\theta + b)\, d\theta.$$

En projetant les points C et A sur la verticale oy, et désignant par α l'angle d'écart initial AoD, on trouve

$$y = (a\theta + b)\cos\theta - a\sin\theta,$$

$$h = (a\alpha + b)\cos\alpha - a\sin\alpha;$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$(2)\quad dt = \frac{-(a\theta + b)\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2g\,[a\,(\theta\cos\theta - \alpha\cos\alpha + \sin\alpha - \sin\theta) + b\,(\cos\theta - \cos\alpha)]}}.$$

Cette expression n'est pas intégrable en général.

Considérons le cas où le pendule ne fait que de petites oscillations de part et d'autre de la verticale DH; l'angle α et la vitesse k doivent être peu considérables; on peut même, sans diminuer la généralité des résultats, supposer $k = 0$, en augmentant convenablement l'angle α.

Si l'on néglige les puissances de θ et α supérieures à la seconde, l'équation (2) se réduit à

$$dt = -\sqrt{\frac{b}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} - \frac{a\,\theta\,d\theta}{\sqrt{gb\,(\alpha^2 - \theta^2)}}.$$

En intégrant et observant que $\theta = \alpha$ quand $t = 0$, il vient

$$(3)\qquad t = \sqrt{\frac{b}{g}}\,\arccos\left(\frac{\theta}{\alpha}\right) + \frac{a}{\sqrt{gb}}\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs pour le carré de la vitesse v

$$(4)\qquad v^2 = gb\,(\alpha^2 - \theta^2).$$

On tirera de ces formules les mêmes conséquences que pour le pendule simple ordinaire. Le pendule atteindra la verticale avec une vitesse maximum $\alpha\sqrt{gb}$, au bout du temps $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$; puis il passera de l'autre côté, et sa vitesse ira en décroissant jusqu'à zéro pour $\theta = -\alpha$; la valeur correspondante de t est $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$, c'est-à-dire double de la durée de la demi-oscillation descendante : alors le pendule redescendra, et il fera ainsi une série d'oscillations isochrones et d'égale amplitude. Le temps d'une oscillation entière est $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$, et son amplitude est 2α.

On doit remarquer que si le rayon a de la poulie n'a pas une valeur très-grande, le terme $\frac{a}{\sqrt{gb}}\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}$ n'aura qu'une influence très-faible et comme négligeable vis-à-vis du premier terme du second membre de l'équation (3). En le négligeant, on aurait la formule ordinaire des petites oscillations d'un pendule simple de longueur b.

Nous rapprocherons des questions qui viennent d'être résolues sur le pendule, un exercice bien simple, et dont l'application est fréquente dans cette théorie : il s'agit de déterminer la longueur du pendule simple correspondant à un pendule composé donné.

3. *Un pendule se compose d'une tige pesante* AB (fig. 66), *d'une épaisseur constante et très-petite, à l'extrémité de laquelle est suspendue une sphère homogène dont le point* O *est le centre. On propose de calculer la longueur l du pendule simple correspondant.*

Soient M la masse totale du système, MK^2 son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension XY et passant par le centre de gravité G du système, a la distance AG, r la distance d'un point quelconque de masse m à l'axe; on a

$$l = a + \frac{K^2}{a} = \frac{M(a^2 + K^2)}{Ma} = \frac{\Sigma mr^2}{Ma};$$

or, Σmr^2 peut se décomposer en deux parties : le moment d'inertie de la tige AB par rapport à l'axe de suspension, plus, le moment d'inertie de la sphère par rapport au même axe. Soient h la longueur de la tige, P son poids, ρ sa densité, ε l'aire de la section droite; on aura pour le moment d'inertie de la tige,

$$\Sigma mr^2 = \rho\varepsilon \int_0^h r^2 dr = \frac{\rho\varepsilon h^3}{3} = \frac{Ph^2}{3g}.$$

Le moment de la sphère se calcule d'abord pour un axe parallèle à XY, passant par le centre o; on trouve ainsi $\frac{2}{5}\frac{P'R^2}{g}$, P' désignant le poids de la sphère et R son rayon; et si l'on y ajoute, conformément à la règle, $M(h+R)^2$, on aura, pour valeur complète du moment d'inertie de la sphère par rapport à l'axe XY, $\frac{P'}{g}\left[\frac{2}{5}R^2+(h+R)^2\right]$.

Il reste à diviser la somme des moments calculés ci-dessus par Ma ou $\frac{(P+P')a}{g}$, ce qui exige qu'on détermine la distance a: soit I le milieu de AB ou le centre de gravité de la tige; le centre G est tel, qu'on a la proportion

$$IG : IO :: P' : P+P', \quad \text{d'où} \quad IG = \frac{\left(\frac{h}{2}+R\right)P'}{P+P'},$$

et, par suite,

$$a = AI + IG = \frac{h}{2} + \frac{(h+2R)P'}{2(P+P')}, \quad Ma = \frac{(P+2P')h+2P'R}{2g};$$

donc enfin

$$l = \frac{2}{15}\,\frac{5Ph^2+3P'[2R^2+5(h+R)^2]}{(P+2P')h+2P'R}.$$

Si l'on désigne par L la longueur AO ou $h+R$, et qu'on suppose le poids de la sphère très-grand par rapport à celui de la tige, on pourra négliger le rapport $\frac{P}{P'}$, et l'on aura sensiblement pour longueur du pendule simple

$$l = L + \frac{2R^2}{5L}.$$

4. *Déterminer la courbe qu'un point matériel pesant, animé d'une vitesse initiale donnée, doit suivre pour que sa distance au point de départ croisse proportionnellement au temps.*

Soit A le point de départ (*fig.* 67), $Am = r$.

On doit avoir

$$dr = cdt.$$

La constante c n'est autre que la vitesse initiale du mobile; car on a

au point A, $dr = ds$, d'où $\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} = c.$

Nous désignerons cette vitesse initiale par $\sqrt{2gh}$, en sorte que la condition de l'énoncé s'exprimera ainsi :

$$(1) \qquad dr = \sqrt{2gh}\,.\,dt.$$

Soit θ l'angle du rayon Am avec la verticale Ay; le principe des forces vives donne l'équation

$$(2) \qquad \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = 2g\,(h + r\cos\theta);$$

éliminant dt entre les équations (1) et (2), il vient

$$hr\frac{d\theta^2}{dr^2} = \cos\theta,$$

d'où l'on tire, en remarquant que θ décroît quand t ou r augmentent,

$$(3) \qquad \frac{dr}{\sqrt{r}} = -\sqrt{h}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}:$$

telle est l'équation différentielle de la trajectoire. Les variables y sont séparées; mais le second membre n'est pas intégrable sous forme finie, et son intégrale dépendra des fonctions elliptiques.

A défaut d'une relation entre r et θ, on peut en obtenir une entre r et l'arc d'une courbe auxiliaire. Supposons construite la courbe représentée par l'équation

$$(4) \qquad \rho = h\sqrt{2\cos 2\omega},$$

dans laquelle ω désigne l'angle que le rayon vecteur ρ fait avec une droite fixe; et soit σ l'arc de cette courbe compté à partir d'un point tel qu'il décroisse quand ω augmente; nous aurons

$$d\sigma = \frac{-h\sqrt{2}.d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}};$$

par conséquent, si l'on pose $\theta = 2\omega$, il vient

$$\frac{dr}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{2}{h}}\,d\sigma,$$

d'où, en intégrant,

$$r = \frac{\sigma^2}{2h}.$$

Nous ne mettons pas de constante arbitraire dans cette intégrale, parce que nous plaçons l'origine de l'arc σ au point qui correspond à $r = 0$, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $\left[\omega = \frac{\alpha}{2}, \rho = h\sqrt{2\cos\alpha}\right]$, α désignant la valeur initiale de l'angle θ.

Ainsi le rayon vecteur de la trajectoire se construira par une troisième proportionnelle à la longueur constante $2h$ et à l'arc σ de la courbe auxiliaire définie par l'équation (4). Cette courbe n'est autre que la lemniscate correspondante à une hyperbole équilatère dont le demi-axe transverse est égal à $h\sqrt{2}$.

5. Un problème analogue à celui que nous venons de résoudre a été traité par Fuss (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1824), et par M. Serret (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX) :

Déterminer la courbe qu'un point matériel pesant, partant du repos, doit suivre pour que ses arcs, comptés à partir de l'origine, soient décrits dans le temps qu'un même mobile emploierait à décrire les cordes de ces arcs.

En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, l'équation (2), où l'on fera $h = 0$, fournira l'expression du temps employé à décrire l'arc Am,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{1}{\cos\theta}\left(r + \frac{dr^2}{rd\theta^2}\right)}\, d\theta;$$

d'ailleurs, le temps nécessaire au même mobile assujetti à parcourir la corde Am est évidemment

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}}.$$

L'équation du problème est donc

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{1}{\cos\theta}\left(r + \frac{dr^2}{rd\theta^2}\right)}\, d\theta,$$

et, si l'on différentie, il vient simplement

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos 2\theta \,.\, d\theta}{\sin 2\theta};$$

l'intégrale est

$$r = a\sqrt{\sin 2\theta},$$

a désignant une constante arbitraire. Cette équation représente une lemniscate dont le centre est au point de départ du mobile, et dont l'axe est incliné de 45 degrés sur la verticale.

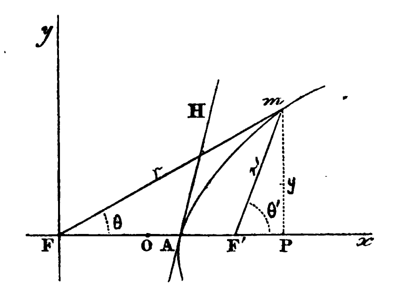
Si les deux temps, au lieu d'être égaux, devaient être dans un rapport constant, on parviendrait de même à une équation intégrable.

CHAPITRE III.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A L'ACTION D'UNE OU PLUSIEURS FORCES CENTRALES.

---

1. *Déterminer le mouvement d'un point matériel* m, *attiré ou repoussé par deux centres fixes* F, F′ *suivant la loi de l'inverse du carré des distances. On suppose que le mobile a reçu une vitesse initiale dirigée dans un plan passant par les deux centres d'attraction* (*).



Prenons pour axe des x la droite FF′, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite menée par le centre F dans le plan où s'accomplit le mouvement. Soient $FF' = a$, $FP = x$, $mP = y$, $Fm = r$, $F'm = r'$, $mFx = \theta$, $mF'x = \theta'$; g, g' les actions exercées par les points F, F′ à l'unité de distance, et qui seront considérées comme positives ou négatives, selon qu'il y aura attraction ou répulsion.

(*) Mémoires à consulter: *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1760, Euler. — *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 411, Legendre. — *Mécanique analytique*, tome II, page 108, Lagrange. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1846, page 345, M. Liouville.

Les équations du mouvement sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gx}{r^3} - \frac{g'(x-a)}{r'^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{r^3} - \frac{g'y}{r'^3}. \end{aligned}\right.$$

En les multipliant respectivement par $2\,dx$ et $2\,dy$, on en déduit d'abord l'*équation des forces vives*,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2\left(\frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + c\right),$$

c étant une constante arbitraire, ou bien

$$(2)\quad \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = 2\left(\frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + c\right).$$

Pour obtenir une autre intégrale première, on élimine tour à tour des équations (1) les termes en r^3 et les termes en r'^3, ce qui donne, eu égard aux formules

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d.\frac{r^2\,d\theta}{dt}}{dt},\quad (x-a)\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d.\frac{r'^2\,d\theta'}{dt}}{dt},$$

les deux équations

$$\frac{d.\frac{r^2\,d\theta}{dt}}{dt} = -\frac{g'ay}{r'^3},$$

$$\frac{d.\frac{r'^2\,d\theta'}{dt}}{dt} = \frac{gay}{r^3};$$

puis, multipliant la première par $\frac{r'^2\,d\theta'}{dt}$, et la seconde par $\frac{r^2\,d\theta}{dt}$, et ajoutant les produits, on a, d'après la formule $u\,dv + v\,du = d.uv$,

$$d.\frac{r^2 r'^2\,d\theta\,d\theta'}{dt^2} = a\left(g\frac{y}{r}\,d\theta - g'\frac{y}{r'}\,d\theta'\right) = a\,(g\sin\theta\,d\theta - g'\sin\theta'\,d\theta');$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{r^2 r'^2 d\theta\, d\theta'}{dt^2} = a(g'\cos\theta' - g\cos\theta + c'). \tag{3}$$

L'élimination de dt entre les équations (2) et (3) fournit l'équation différentielle de la trajectoire

$$a(dr^2 + r^2 d\theta^2)(g'\cos\theta' - g\cos\theta + c') = 2r^2 r'^2 d\theta\, d\theta' \left(\frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + c\right). \tag{4}$$

Les constantes c et c' dépendent des circonstances initiales. Si l'on supposait, par exemple, que le mouvement commençât au point A de l'axe FF′ situé entre les deux points fixes, et que la vitesse initiale k fît avec cet axe un angle $\text{HA}x = \alpha$; en posant

$$\frac{\text{F'A}}{\text{FA}} = m, \quad \text{d'où} \quad \text{F'A} = \frac{am}{1+m}, \quad \text{FA} = \frac{a}{1+m},$$

on aurait, pour $t = 0$,

$$\theta = 0, \quad \theta' = \pi, \quad r = \frac{a}{1+m}, \quad r' = \frac{am}{1+m},$$

$$\frac{r\,d\theta}{dt} = -\frac{r'\,d\theta'}{dt} = k\sin\alpha;$$

les équations (2) et (3) donneraient alors

$$c = \tfrac{1}{2}k^2 - \left(g + \frac{g'}{m}\right)\frac{1+m}{a},$$

$$c' = -\frac{amk^2\sin^2\alpha}{(1+m)^2} + g + g'.$$

Examinons d'abord un cas particulier où l'équation (4) est immédiatement intégrable; c'est celui où *les attractions des deux centres sont supposées égales* ($g = g'$), et où, de plus, *les données initiales sont telles, que les constantes* c *et* c' *soient nulles*.

Il résulte des expressions précédentes de c et c' que l'on

aura dans ce cas

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad k = (1 + m)\sqrt{\frac{2g}{ma}}.$$

Ainsi, pour réaliser l'hypothèse que nous allons discuter, il faut et il suffit que le mobile parte du point A avec une vitesse perpendiculaire à la ligne des centres et égale à $(1 + m)\sqrt{\frac{2g}{ma}}$; quant à la position du point A entre les centres, elle reste arbitraire.

Cela posé, l'équation (4) se réduit à

$$(5) \quad a(\cos\theta' - \cos\theta)(dr^2 + r^2 d\theta^2) - 2rr'(r + r')\,d\theta\,d\theta' = 0;$$

on a d'ailleurs les relations

$$(6) \qquad r = \frac{a\sin\theta'}{\sin(\theta' - \theta)}, \quad r' = \frac{a\sin\theta}{\sin(\theta' - \theta)},$$

qui permettent d'éliminer de l'équation (5) r, r' et dr: cette équation, toutes réductions faites, prend cette forme très-simple,

$$(\sin\theta\,d\theta' + \sin\theta'd\theta)^2 = 0.$$

Les variables se séparent;

$$(7) \qquad \frac{d\theta}{\sin\theta} = -\frac{d\theta'}{\sin\theta'},$$

et l'intégrale est

$$(8) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta' = D.$$

Pour reconnaître la nature de la courbe, on peut transformer cette intégrale en coordonnées rectangulaires; mais il est plus simple de revenir à l'équation différentielle (7) qui, vu la relation $r\sin\theta = r'\sin\theta'$, donne

$$r\,d\theta = -r'd\theta';$$

et comme on a d'ailleurs

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = dr'^2 + r'^2 d\theta'^2,$$

on en conclut

$$dr^2 = dr'^2; \quad \text{d'où} \quad r \pm r' = \text{const}.$$

Cette double équation caractérise une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les deux centres fixes; mais, comme $d\theta$ et $d\theta'$ sont de signes contraires d'après l'équation (7), les angles θ et θ' varient en sens contraires, ce qui exclut l'ellipse: donc *la trajectoire est une hyperbole ayant pour foyers les deux centres d'attraction.*

D'après les hypothèses faites sur l'état initial, le point de départ A peut être placé où l'on voudra entre les deux centres; mais une fois qu'il est fixé, la vitesse du mobile à l'origine est déterminée en grandeur et en direction. Si l'on suppose A plus près de F′ que de F, ce sera la branche de droite de l'hyperbole qui sera décrite par le point m; dans le cas contraire, ce sera la branche de gauche : si l'on supposait AF′ = AF, la trajectoire se réduirait à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF′.

La vitesse v du mobile en un point quelconque de la trajectoire est fournie par l'équation (2), où l'on doit faire $g' = g$, $c = 0$, ce qui donne

$$v^2 = 2g\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Soient

$$a = 2c, \quad \frac{a(1-m)}{1+m} = 2b;$$

en transportant l'origine des coordonnées au milieu O de FF′, l'équation de la trajectoire prend la forme

$$b^2y^2 - (c^2 - b^2)x^2 = -b^2(c^2 - b^2),$$

et l'on a

$$r = b + \frac{cx}{b}, \quad r' = \frac{cx}{b} - b;$$

par suite,

$$v^2 = \frac{4gbcx}{c^2x^2 - b^4}.$$

D'ailleurs

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{c^2 x^2 - b^4}{b^2(x^2 - b^2)} \cdot \frac{dx^2}{dt^2}:$$

donc

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{4gb^3cx(x^2 - b^2)}{(c^2x^2 - b^4)^2},$$

d'où

$$2b\sqrt{gbc}\,dt = \frac{(c^2x^2 - b^4)\,dx}{\sqrt{x(x^2 - b^2)}}.$$

La détermination du lieu qu'occupe le mobile à chaque instant sur sa trajectoire, est ainsi ramenée à une quadrature.

En intégrant par parties le terme $\dfrac{c^2x^2\,dx}{\sqrt{x(x^2 - b^2)}}$ ou $c^2 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}\sqrt{x}$, on ramène aisément la quadrature du second membre de l'équation précédente, à ne dépendre que de la seule intégrale $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(x^2 - b^2)}}$; on trouve

$$(9)\quad \begin{cases} 2b\sqrt{gbc}\,t = \dfrac{2}{3}c^2\sqrt{x(x^2 - b^2)} \\ \qquad + \dfrac{1}{3}b^2(c^2 - 3b^2)\displaystyle\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{x(x^2 - b^2)}}. \end{cases}$$

Quant à l'intégrale $\displaystyle\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{x(x^2 - b^2)}}$, elle n'est pas exécutable; si l'on y pose

$$x = \frac{b}{\cos^2\varphi}, \quad \text{elle devient} \quad \sqrt{\frac{2}{b}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

fonction elliptique de première espèce, dont le module est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Il est à remarquer que, si l'on supposait $c^2 = 3b^2$, c'est-

à-dire si le rapport $\frac{AF'}{AF}$ ou m était égal à $2-\sqrt{3}$, la fonction elliptique disparaîtrait de l'équation (9), et le temps t s'exprimerait exactement en fonction de x, par une formule algébrique.

Revenons au cas général :

Euler est le premier qui soit parvenu à séparer les variables dans l'équation (4); nous allons exposer, sommairement, les transformations auxquelles Euler a eu recours.

Il introduit deux variables nouvelles p et q liées aux angles $\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}\theta'$ par les relations

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta'}=p^2,\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta'=q^2;$$

d'où

$$\sin\theta=\frac{2pq}{1+p^2q^2},\quad \cos\theta=\frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2},$$

$$\sin\theta'=\frac{2pq}{p^2+q^2},\quad \cos\theta'=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2};$$

et, en vertu des formules (6),

$$r=\frac{a}{1-p^2}-\frac{aq^2}{1+q^2},\quad r'=\frac{a}{1-p^2}-\frac{a}{1+q^2}.$$

On en tire

$$dr^2=4a^2\left[\frac{pdp}{(1-p^2)^2}-\frac{qdq}{(1+q^2)^2}\right]^2,$$

$$d\theta=\frac{2(pdq+qdp)}{(1+p^2q^2)^2},\quad d\theta'=\frac{2(pdq-qdp)}{p^2+q^2};$$

et, par suite,

$$dr^2+r^2d\theta^2=\frac{4a^2(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}\left[\frac{dp^2}{(1-p^2)^2}+\frac{dq^2}{(1+q^2)^2}\right],$$

$$r^2r'^2d\theta\,d\theta'=\frac{4a^4(p^2+q^2)(1+p^2q^2)(p^2dq^2-q^2dp^2)}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), on reconnaît, après diverses réductions, que *le coefficient de* dp^2

ne contient que la variable q, et celui de dq^2 la seule variable p, en sorte que l'équation prend la forme

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \pm \frac{dq}{\sqrt{Q}}, \tag{10}$$

où les variables sont séparées.

On a

$$P = \frac{g+g'}{2}(1-p^4) + acp^2 - \frac{c'}{2}(1-p^2)^2,$$

$$Q = \frac{g'-g}{2}(1-q^4) + acq^2 + \frac{c'}{2}(1+q^2)^2.$$

Quant à l'expression du temps en fonction des mêmes variables p et q, on la tirera de l'une des équations (2) ou (3), par exemple de l'équation (3), qui donne

$$dt^2 = \frac{r^2 r'^2 d\theta\, d\theta'}{a(g'\cos\theta' - g\cos\theta + c')},$$

et où l'on remplacera r, r', θ, θ' par leurs valeurs.

Toutes ces substitutions un peu longues et qui demandent à être habilement dirigées, sont détaillées dans le *Traité des Fonctions elliptiques* de Legendre (t. I, p. 411 et suivantes). On trouve, pour l'expression réduite de dt,

$$dt = a\sqrt{2a}\left(\frac{p^2\,dp}{(1-p^2)^2\sqrt{P}} \pm \frac{q^2\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{Q}}\right), \tag{11}$$

où les variables sont également séparées.

Le problème est donc ramené aux quadratures.

L'intégrale de l'équation (10), qui donne la relation entre q et p, dépend des fonctions elliptiques de première espèce.

L'expression du temps fournie par l'intégrale de l'équation (11), dépend des fonctions elliptiques de troisième espèce, et peut, dans beaucoup de cas, être réduite aux fonctions de première et de seconde espèce.

Signification géométrique des variables p *et* q. — Des valeurs trouvées plus haut pour r et pour r', on tire

$$r + r' = \frac{a(1 + p^2)}{1 - p^2}, \quad r - r' = \frac{a(1 - q^2)}{1 + q^2}.$$

Ainsi la somme des rayons vecteurs Fm, F$'m$ ne dépend que de la variable p, et leur différence ne dépend que de la variable q. Cela posé, soit

$$p^2 = \alpha, \quad q^2 = \beta,$$

un couple de valeurs déterminées de p^2 et q^2 qui définissent un certain point m de la trajectoire; l'équation

$$r + r' = \frac{a(1 + \alpha)}{1 - \alpha},$$

où r et r' sont considérées comme seules variables, appartient à une ellipse dont F et F$'$ sont les foyers, et qui passe au point m; son grand axe est $\frac{a(1 + \alpha)}{1 - \alpha}$: de même, l'équation

$$r - r' = \frac{a(1 - \beta)}{1 + \beta}$$

caractérise une hyperbole homofocale qui passe également au point m, et dont l'axe transverse est $\frac{a(1 - \beta)}{1 + \beta}$. Ainsi chaque couple de valeurs des variables p et q représente les paramètres d'une ellipse et d'une hyperbole ayant pour foyers les centres fixes, et dont l'intersection marque la position du mobile.

Cette propriété a fait donner aux variables p et q le nom de *coordonnées elliptiques*. La variable p relative à l'ellipse, ou la racine carrée du rapport $\frac{\tang \frac{1}{2}\theta}{\tang \frac{1}{2}\theta'}$, est toujours comprise entre $+1$ et -1. Si $p^2 = 1$, on a $r + r' = \infty$, et, par conséquent, la position correspondante du mobile est infiniment éloignée. La variable q relative à l'hyperbole, ou

la racine carrée du produit $\tang \frac{1}{2}\theta . \tang \frac{1}{2}\theta'$, peut passer par tous les états de grandeur de $-\infty$ à $+\infty$.

Il est bon de remarquer que pour que la description de la trajectoire soit complète, on pourra être conduit à attribuer à p^2 et à q^2 des valeurs négatives, et, par suite, à p et à q des valeurs imaginaires.

L'ellipse et l'hyperbole homofocales se coupent orthogonalement en quatre points; mais on lèvera toute ambiguïté sur la position du mobile correspondante à un système de valeurs de p et de q, par la considération des coordonnées rectangulaires de ce point, qui sont :

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}.$$

Si l'on suppose, comme ci-dessus, que le mouvement commence au point A situé entre les deux centres fixes, on aura en ce point

$$r + r' = a, \quad r - r' = \frac{a(1-m)}{1+m},$$

et, par conséquent, $\quad p = 0, \quad q^2 = m.$

L'équation $q^2 = m$ appartient à une hyperbole ayant A pour sommet, et pour foyers les deux centres. Or le mobile commence à décrire, suivant la direction AH de sa vitesse initiale, un élément de sa trajectoire incliné de l'angle α sur l'axe FF'; selon que l'angle α sera aigu ou obtus, cet élément sera dirigé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'hyperbole. Dans le premier cas, la différence $(r - r')$ va en augmentant avec le temps; et par suite, q diminue, puisque $r - r' = \frac{a(1-q^2)}{1+q^2}$; donc $\frac{dq}{dt}$ est négatif au commencement du mouvement. Dans le second cas, $\frac{dq}{dt}$ commence par être positif. Or $\frac{dp}{dt}$ commence évidemment par être positif, puis-

que p est nul à l'origine. Donc la considération de l'état initial suffit pour lever l'ambiguïté du signe du second membre de l'équation (10); on devra prendre le signe $+$ si l'angle α est obtus, et le signe $-$ s'il est aigu.

Quelle condition doit remplir l'état initial pour que la trajectoire admette des branches infinies?

Si l'on fait $r=\infty$ et $r'=\infty$ dans l'équation (2), il vient, en désignant par v la vitesse du mobile,

$$v^2 = 2c.$$

Ainsi, pour qu'il y ait une branche infinie, il faut que l'on ait $c>0$. Or, quelle que soit la position initiale du mobile (sur l'axe ou hors de l'axe FF′), on a, en appelant r_0, r'_0 les valeurs initiales de r et r', et k la vitesse initiale,

$$c = \frac{1}{2}k^2 - \left(\frac{g}{r_0} + \frac{g'}{r'_0}\right):$$

donc l'orbite sera finie toutes les fois que l'on aura

$$k^2 < 2\left(\frac{g}{r_0} + \frac{g'}{r'_0}\right),$$

et elle ne pourra admettre des branches infinies qu'autant que l'on aura

$$k^2 \geqq 2\left(\frac{g}{r_0} + \frac{g'}{r'_0}\right).$$

Si $g'=0$, le mobile n'est plus soumis qu'à un seul centre d'attraction, et les formules précédentes fournissent les résultats connus pour le mouvement d'un mobile attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

Le lecteur, désireux d'approfondir tous les détails de cette solution, pourra consulter le chapitre déjà cité des Fonctions elliptiques de Legendre.

Une seconde solution beaucoup plus simple du même problème a été donnée par M. Liouville, dans son Mémoire

sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.

En partant des équations différentielles du mouvement sous la forme que leur a donnée Lagrange, M. Liouville parvient, par un heureux choix de variables, à des équations où les variables sont séparées. Cette méthode s'applique avec le même succès à toutes les questions de dynamique où la fonction des forces satisfait à une certaine condition d'intégrabilité. Nous allons en présenter l'exposé succinct, puis nous l'appliquerons au problème d'attraction qui vient d'être résolu, et au cas imaginé par Lagrange d'un troisième centre d'attraction placé au milieu de la droite qui joint les deux autres et doué d'une action proportionnelle à la distance. Quant aux autres applications dont la méthode est susceptible, nous renvoyons au Mémoire de M. Liouville.

Les coordonnées rectangulaires (x, y) d'un mobile situé dans un plan peuvent être remplacées d'une infinité de manières par deux nouvelles variables (α, β) dont x, y sont des fonctions prises à volonté. Soient

$$x = f(\alpha, \beta), \quad y = \varphi(\alpha, \beta);$$

on en tirera

$$dx = \frac{df}{d\alpha}d\alpha + \frac{df}{d\beta}d\beta, \quad dy = \frac{d\varphi}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta}d\beta,$$

et, par suite, on aura, pour le carré de l'élément ds parcouru dans le temps dt, une expression de la forme

$$ds^2 = \lambda\, d\alpha^2 + \mu\, d\alpha\, d\beta + \nu\, d\beta^2.$$

Supposons les variables α et β tellement choisies que l'on ait

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \nu = \lambda.$$

L'expression de ds^2 se réduira à

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

où λ désigne une fonction de α, β. Nous verrons plus bas

qu'en prenant pour α et β les paramètres d'ellipses et d'hyperboles homofocales, les conditions précédentes sont remplies. Cela posé, l'équation des forces vives prend la forme

$$(12) \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\lambda}(\mathrm{V} + c),$$

V étant la fonction des forces accélératrices, et c une constante. A cette équation, il suffit d'associer l'une des équations générales du mouvement sous la forme donnée, page 7,

$$\frac{d\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\alpha'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\alpha} - \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha} = 0,$$

où T désigne la demi-somme des forces vives du système.

Comme il s'agit ici d'un simple point matériel, dont la masse est prise pour unité, l'on a

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\lambda(\alpha'^2 + \beta'^2), \quad \left(\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}\right),$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\frac{d\lambda}{d\alpha}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\alpha'} = \lambda\alpha',$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha};$$

ou bien, en vertu de l'équation (12),

$$(13) \qquad \frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\alpha}(\mathrm{V} + c) + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}.$$

Si l'on multiplie cette équation par $2\lambda\, d\alpha$, on peut l'écrire

$$d.\left(\lambda\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2\,d.(\mathrm{V} + c)\lambda}{d\alpha}\,d\alpha,$$

et, par conséquent, elle sera intégrable immédiatement, si

$\frac{d.(V+c)\lambda}{d\alpha}$ ne contient que la variable α; soit

$$\frac{d.(V+c)\lambda}{d\alpha}=f'(\alpha),$$

d'où

$$(14)\qquad (V+c)\lambda=f(\alpha)-F(\beta);$$

[$f(\alpha)$ et $F(\beta)$ sont deux fonctions quelconques]. L'équation différentielle précédente devient

$$d.\left(\lambda\frac{d\alpha}{dt}\right)^2=2f'(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où, en intégrant,

$$(15)\qquad \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{d\alpha}{dt}\right)^2=f(\alpha)-A;$$

A est une constante arbitraire. Par suite, l'équation (12) donne

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{d\beta}{dt}\right)^2=A-F(\beta).$$

Des équations (15) et (16) on conclut immédiatement

$$(17)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}}=\frac{d\beta}{\sqrt{A-F(\beta)}},$$

équation différentielle de la trajectoire, où les variables sont séparées, et, pour l'expression du temps,

$$(18)\qquad \sqrt{2}\,dt=\frac{\lambda\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}}.$$

Cette dernière quadrature s'exécutera, après avoir remplacé λ par sa valeur en fonction de α, β, et aussi β par sa valeur en α tirée de l'équation (17) qu'on suppose intégrée.

Il est un cas étendu où l'expression de t s'obtiendra sans même supposer qu'une des variables β ait été préalablement exprimée en fonction de l'autre, c'est lorsque la condition exprimée par l'équation (14) a lieu, non pas seule-

ment pour une valeur particulière de la constante c (ce qui exigerait une certaine relation entre les circonstances initiales du mouvement), mais quelle que soit cette constante. Alors il faut que $V\lambda$ et $c\lambda$ soient séparément de la forme du second membre de l'équation (14), c'est-à-dire

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda = \varphi(\alpha) - \Phi(\beta), \\ V\lambda = \psi(\alpha) - \Psi(\beta), \end{cases}$$

d'où

$$f(\alpha) = \psi(\alpha) + c\varphi(\alpha), \quad F(\beta) = \Psi(\beta) + c\Phi(\beta),$$

et, par suite, les formules (17), (18) sont remplacées par les suivantes :

$$(20)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{\psi(\alpha) + c\varphi(\alpha) - A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A - \Psi(\beta) - c\Phi(\beta)}},$$

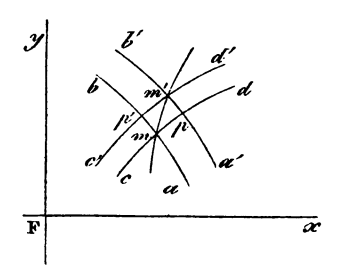
$$(21)\qquad 2\,dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\psi(\alpha) + c\varphi(\alpha) - A}} - \frac{\Phi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A - \Psi(\beta) - c\Phi(\beta)}};$$

cette expression de dt est immédiatement intégrable.

Les équations

$$(22)\qquad \alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.},$$

sont celles de deux systèmes de lignes orthogonales ; en sorte que chaque position du mobile dans son plan peut être regardée comme déterminée par l'intersection à angle droit d'une ligne du premier système par une ligne du second. En effet, soient (α, β), $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ les coordonnées de deux points infiniment voisins m, m' de la tra-



jectoire ; ab, cd, les deux lignes qui se croisent au point m

et qui sont représentés par les équations (22) où les constantes reçoivent les valeurs de α et β pour le point m; $a'b'$, $c'd'$ les deux lignes correspondantes pour le point m'; ces quatre lignes interceptent un quadrilatère infiniment petit $mpm'p'$, dont l'élément mm' ou ds est une diagonale, et l'on a

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mp}^2 + \overline{m'p}^2 - 2\,mp.m'p\cos(mpm').$$

Or

$$\overline{mm'}^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Si l'on fait dans cette formule $d\beta = 0$, ds ou mm' se change dans mp, puisque le point p répond aux coordonnées $(\alpha + d\alpha, \beta)$; donc

$$\overline{mp}^2 = \lambda d\alpha^2, \quad \text{et de même} \quad \overline{mp'}^2 = \lambda d\beta^2.$$

Mais $\overline{mp'}^2$ peut être confondu avec $\overline{pm'}^2$, dont il ne diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre; donc on a

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mp}^2 + \overline{m'p}^2,$$

d'où

$$\cos(mpm') = 0, \quad mpm' = \frac{\pi}{2}.$$

C. Q. F. D.

Réciproquement, si les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ représentent deux systèmes de lignes orthogonales quelconques, on pourra dire que le carré de l'élément de trajectoire aura la forme

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2;$$

mais λ' ne sera pas nécessairement égal à λ.

En effet, l'arc s étant une fonction de α, β, on a en général

$$mm' \quad \text{ou} \quad ds = A\,d\alpha + B\,d\beta,$$

d'où

$$mp = A\,d\alpha, \quad m'p = B\,d\beta.$$

or

$$[illegible] = [illegible] - [illegible]$$

donc

$$[illegible]$$

Il importe de remarquer que les formules relatives à l'équation de la trajectoire et à l'expression du temps, ne cesseront pas d'être applicables aux quadratures, si l'on remplace x par une fonction quelconque d'une nouvelle variable [illegible] et [illegible] par une fonction quelconque d'une variable [illegible]. Posons, en effet,

$$[illegible]$$

[illegible] étant fonction de [illegible] seulement, et [illegible] fonction de [illegible]; il en résulte

$$[illegible]$$

et V peut contenir les deux variables [illegible] et [illegible]. Les équations [illegible] = const., [illegible] = const. représenteront encore deux systèmes de lignes orthogonales.

Les conditions d'intégrabilité [illegible] deviendront

$$[illegible]$$

Les fonctions [illegible] et [illegible] ne sont plus les mêmes que ci-dessus, et les équations (10) et (11) n'éprouveront d'autres modifications qu'en ce que les variables finies x et y seront remplacées par [illegible] et [illegible], et les différentielles [illegible] par $\sqrt{m}\,d\alpha$, $\sqrt{n}\,d\beta$.

Application. — Prenons pour [illegible] et [illegible] les demi-axes des ellipses et des hyperboles homofocales représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-h^2}=1,\quad \frac{x^2}{\beta^2}-\frac{y^2}{h^2-\beta^2}=1,$$

où la constante $2h$ désigne l'excentricité commune ($\alpha > h$, $\beta < h$).

x et y sont ainsi des fonctions de α et β, qu'il est aisé

d'exprimer en remarquant que les équations précédentes ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de μ^2 en ν^2, et, par suite, que les valeurs de μ^2 et ν^2 satisfont à une même équation du deuxième degré

$$(\mu^2)^2 - (x^2 + y^2 + b^2)\mu^2 + b^2x^2 = 0,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$b^2x^2 = \mu^2\nu^2, \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{\mu\nu}{b};$$

et si l'on change μ^2 en $\mu^2 - b^2$, ν^2 en $b^2 - \nu^2$ et x *en* y, on a, sans nouveau calcul,

$$b^2y^2 = (\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2), \quad \text{ou} \quad y = \pm\frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b}.$$

On peut supprimer les doubles signes dans ces formules, en convenant que ν recevra, comme x, des valeurs positives ou négatives, et que $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ pourra également changer de signe avec y, conventions qui reviennent à faire

$$\nu = b\cos\theta; \quad \text{d'où} \quad x = \mu\cos\theta, \quad y = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sin\theta.$$

Cela posé, on a

$$dx = \frac{\mu\,d\nu + \nu\,d\mu}{b}, \quad dy = \frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}\,.\,\mu\,d\mu}{b\sqrt{\mu^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,.\,\nu\,d\nu}{b\sqrt{b^2 - \nu^2}},$$

d'où

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{1}{\mu^2 - b^2}d\mu^2 + \frac{1}{b^2 - \nu^2}d\nu^2\right).$$

Les termes contenant le produit $d\mu\,d\nu$ ont disparu, comme cela devait être, puisque l'ellipse et l'hyperbole homofocales se coupent orthogonalement; et, en comparant cette expression de ds^2 avec la formule (23), on a

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

De plus, la valeur de λ a la forme exigée par l'équa-

tion (24), c'est-à-dire qu'elle se compose d'une fonction de μ jointe à une fonction de ν; M. Liouville a démontré que le système de coordonnées elliptiques est le seul qui jouisse de cette propriété.

D'après cela, pour que les équations du mouvement soient réduites aux quadratures par les formules (20) (21), il faut et il suffit que la fonction des forces V satisfasse à la condition (24), ou que l'on ait

$$V = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Revenons au problème de dynamique qui fait l'objet de ce chapitre.

Si l'on prend les deux centres fixes F, F′ pour foyers communs des ellipses et des hyperboles, on aura

$$\text{FF}' \quad \text{ou} \quad a = 2b, \quad r = \mu + \frac{b}{\mu}x = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu;$$

et comme $V = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'}$, il vient

$$V = \frac{(g + g')\mu - (g - g')\nu}{\mu^2 - \nu^2}:$$

c'est la forme voulue.

Donc, si l'on pose

$$M = (\mu^2 - b^2)[(g + g')\mu + c\mu^2 - A],$$
$$N = (b^2 - \nu^2)[A - (g - g')\nu - c\nu^2],$$

l'équation différentielle de la trajectoire et la différentielle du temps seront, d'après les formules (20) (21),

$$(25) \qquad \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \frac{d\nu}{\sqrt{N}},$$

$$(26) \qquad 2\,dt = \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}.$$

Ces équations ne doivent pas différer, au fond, des équa-

tions (10) et (11) que nous a fournies la première méthode; en effet, il est aisé de voir que les variables d'Euler, p et q, sont liées à μ et ν par les formules

$$p^2 = \frac{\mu - b}{\mu + b}, \quad q^2 = \frac{b - \nu}{b + \nu};$$

et, vu les expressions de P et Q, on trouve

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{b}{2}} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{M}}, \quad \frac{dq}{\sqrt{Q}} = \sqrt{\frac{b}{2}} \cdot \frac{d\nu}{\sqrt{N}},$$

en posant, comme on peut le faire, $cb^2 + bc' = A$.

Soient r_0, r'_0 les distances initiales du mobile aux deux centres fixes, k la vitesse initiale et α l'angle que sa direction fait avec la ligne des centres; on en conclura les valeurs initiales de μ, ν, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ que nous désignerons par μ_0, ν_0, μ'_0, ν'_0, à l'aide des équations

$$\mu_0 + \nu_0 = r_0, \quad \mu_0 - \nu_0 = r'_0,$$

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} k \cos\alpha &= \frac{\mu_0}{b}\mu'_0 + \frac{\nu_0}{b}\nu'_0, \\ k \sin\alpha &= \frac{\sqrt{b^2 - \nu_0^2}\cdot\mu_0}{b\sqrt{\mu_0^2 - b^2}}\mu'_0 - \frac{\sqrt{\mu_0^2 - b^2}\cdot\nu_0}{b\sqrt{b^2 - \nu_0^2}}\nu'_0. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs des constantes arbitraires A, c seront ensuite fournies par les équations, déduites des formules (12) et (15),

$$(27) \qquad c = \frac{k^2}{2} - \left(\frac{g}{\mu_0 + \nu_0} + \frac{g'}{\mu_0 - \nu_0} \right),$$

$$(28) \qquad A = (g + g')\mu_0 + c\mu_0^2 - \frac{(\mu_0^2 - \nu_0^2)^2}{4(\mu_0^2 - b^2)}\mu_0'^2.$$

L'équation de la trajectoire peut s'écrire

$$(29) \qquad \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{N}};$$

mais il peut arriver, comme on l'a déjà vu pour un cer-

tain état initial, que la trajectoire soit une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les deux centres fixes, auquel cas elle aura pour équation

$$\mu = \mu_0 \quad \text{ou} \quad \nu = \nu_0.$$

Cependant cette solution échappe à l'intégrale générale (29) où μ et ν sont essentiellement variables.

Pour éclaircir ce point, remarquons que l'équation différentielle (25) admet, outre l'intégrale générale, la solution singulière

$$MN = 0, \quad \text{d'où} \quad M = 0 \quad \text{ou} \quad N = 0.$$

L'équation $M = 0$ fournira pour μ des valeurs constantes, et l'autre $N = 0$ en fournira pour ν; à ces valeurs répondront des ellipses ou des hyperboles qui pourront satisfaire à la question, *si toutefois les circonstances initiales le comportent.*

Examinons, par exemple, quelles conditions doit remplir l'état initial du mobile pour qu'il décrive une ellipse ayant les centres fixes pour foyers.

On aura constamment dans ce cas

$$\mu = \mu_0,$$

et cette constante μ_0 est distincte de b, puisque autrement le mouvement aurait évidemment lieu suivant la droite FF'; donc l'équation $M = 0$ donne

$$c\mu_0^2 + (g + g')\mu_0 - A = 0,$$

et, par suite, on tire de l'équation (28)

$$\mu'_0 = 0.$$

Cette première condition détermine la direction de la vitesse initiale tangente à l'ellipse décrite; car les équations (α), dans lesquelles on posera $\mu'_0 = 0$, donnent

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{\sqrt{\mu_0^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - \nu_0^2}}.$$

Si l'on supposait que le point de départ du mobile fût situé sur le prolongement de la ligne des centres, on aurait $\nu_0 = b$, et tang $\alpha = \infty$: la vitesse initiale serait donc perpendiculaire à l'axe, ce qui est, en effet, le caractère de la tangente au sommet d'une ellipse.

La condition $\mu'_0 = 0$ n'est pas la seule ; il faut, en outre, que l'on ait $\left(\frac{d\text{M}}{d\mu}\right)_0 = 0$, c'est-à-dire que l'équation $\text{M} = 0$ ait au moins deux racines égales à μ_0. Cette seconde condition a été établie par Lagrange (*Mécanique analytique*, tome II, page 115).

M. Serret l'a démontrée fort simplement (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XIII, page 30) en remarquant que la trajectoire elliptique, indiquée par la solution singulière $\text{M} = 0$, ne saurait convenir qu'autant que l'intégrale générale (29) est en défaut ; d'où il suit que l'intégrale définie $\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\text{M}}}$ doit devenir infinie pour $\mu = \mu_0$; or cela exige que le polynôme M, qui déjà s'annule pour $\mu = \mu_0$, contienne le facteur $\mu - \mu_0$ à une puissance supérieure à la première. Ainsi l'équation $\text{M} = 0$, ou

$$c\mu^2 + (g + g')\mu - \text{A} = 0,$$

aura ses deux racines égales à μ_0 ; d'où l'on conclut

$$c = -\frac{g + g'}{2\mu_0}, \quad \text{A} = \frac{(g + g')\mu_0}{2},$$

et, par suite, la vitesse initiale k sera complétement déterminée par la formule (27)

$$k^2 = -\frac{g + g'}{\mu_0} + 2\left(\frac{g}{\mu_0 + \nu_0} + \frac{g'}{\mu_0 - \nu_0}\right),$$

ou

$$k^2 = \frac{g(\mu_0 - \nu_0)}{\mu_0(\mu_0 + \nu_0)} + \frac{g'(\mu_0 + \nu_0)}{\mu_0(\mu_0 - \nu_0)}$$

Si l'on suppose tour à tour que le mobile ne soit soumis qu'à l'attraction d'un seul centre fixe F ou F', on devra faire successivement dans cette valeur de k^2, $g' = 0$, $g = 0$; et, par conséquent, en désignant par k'^2, k''^2, les deux valeurs que prend alors le carré de la vitesse initiale, on voit qu'on aura

$$k^2 = k'^2 + k''^2.$$

De là ce théorème, dû à Legendre :

Soit k' la vitesse nécessaire pour qu'un point matériel, placé en un point donné d'une ellipse dont F *et* F' *sont les foyers, décrive cette ellipse sous l'action d'une force attractive émanant du foyer* F; *soit k'' la vitesse nécessaire pour que le même point décrive l'ellipse sous l'action d'une force attractive émanant du foyer* F' : *si ces deux forces agissent à la fois sur le mobile, et que sa vitesse initiale k soit égale à $\sqrt{k'^2 + k''^2}$, il décrira encore la même ellipse.* (Les attractions suivent la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances.)

L'hypothèse $\mu = b$ correspond, comme on l'a dit plus haut, à un mouvement rectiligne; dans ce cas, pour exprimer que l'équation M = 0 a deux racines égales à b, on aurait la seule équation

$$cb^2 + (g + g')\, b - \mathrm{A} = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad \tang \alpha = 0.$$

La vitesse initiale devrait donc être dirigée suivant la ligne des centres FF'; mais sa grandeur resterait arbitraire, ce que l'on conçoit bien à priori.

2. Lagrange a fait voir le premier que *les équations du mouvement sont encore réductibles aux quadratures, quand on ajoute un troisième centre fixe, placé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, et attirant le mobile en raison directe de la simple distance.*

En effet, la fonction des forces devient alors

$$V = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + fR^2,$$

f représentant le pouvoir attractif du troisième centre O à l'unité de distance, et R le rayon vecteur mené de ce centre au point mobile; or

$$R^2 = x^2 + y^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2,$$

donc

$$V = \frac{[(g+g')\mu - fb^2\mu^2 + f\mu^4] - [(g-g')\nu - fb^2\nu^2 + f\nu^4]}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Et l'on voit que cette expression satisfait encore à la condition d'intégrabilité

$$V = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2};$$

seulement les intégrations seront plus compliquées que dans le cas précédent, et ne se réduiront plus à de simples fonctions elliptiques.

Les développements que nous avons donnés plus haut sur la solution singulière qu'admet l'équation différentielle (25), subsisteront pour l'équation de la nouvelle trajectoire, sans autre modification que l'introduction, dans le polynôme M, des termes qui proviennent de l'attraction f.

La méthode que nous venons d'exposer s'étend :

1°. Au *mouvement d'un point sur une sphère,* en remplaçant les deux coniques planes homofocales par deux *coniques sphériques* dont l'intersection a lieu à angle droit, et détermine à chaque instant la position du mobile.

2°. Au *mouvement d'un point sur un ellipsoïde* en le coupant par deux systèmes d'*hyperboloïdes homofocaux* qui tracent les lignes de courbure de sa surface.

3. *Un mobile est sollicité par une force dirigée vers*

un centre fixe, et l'on propose de déterminer la loi suivant laquelle l'attraction doit varier avec la distance pour que la trajectoire soit ou une spirale hyperbolique ayant pour pôle le centre fixe, ou une spirale logarithmique de même pôle, ou une circonférence de cercle passant par le centre fixe.

En partant de la formule donnée par M. Binet,

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right],$$

où R désigne l'intensité de la force centrale, r la distance du mobile au centre, θ l'angle du rayon vecteur avec une droite fixe, et c le double de l'aire constante décrite dans l'unité de temps, on trouve aisément :

Pour le cas de la spirale hyperbolique dont l'équation est $r = \frac{a}{\theta}$,

$$R = \frac{c^2}{r^3};$$

pour la spirale logarithmique dont l'équation est $r = a^\theta$,

$$R = \frac{c^2[1 + (la)^2]}{r^3} \quad \text{(même loi)};$$

et *pour le cas du cercle* dont l'équation est $r = a\cos\theta$,

$$R = \frac{2a^2c^2}{r^5}.$$

4. *Déterminer le mouvement d'un point matériel m soumis à l'action de plusieurs forces dirigées vers des centres fixes, et respectivement proportionnelles aux distances de ce point à ces divers centres.*

Soient x, y, z les coordonnées du point m relatives à trois axes rectangulaires quelconques (*fig.* 68); a, b, c les coordonnées du centre A; μ l'intensité de la force accélératrice qui émane de ce centre à l'unité de distance : μr sera son in-

tensité à la distance $Am = r$; et comme elle est dirigée de m vers A, ses composantes seront

$$\mu(a-x),\quad \mu(b-y),\quad \mu(c-z).$$

Si nous désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues pour les centres A′, A″,..., nous aurons les trois équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(a-x) + \mu'(a'-x) + \mu''(a''-x) + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu(b-y) + \mu'(b'-y) + \mu''(b''-y) + \ldots,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu(c-z) + \mu'(c'-z) + \mu''(c''-z) + \ldots.$$

Mais il convient de leur donner une autre forme. La première de ces équations peut s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\mu+\mu'+\mu''+\ldots)\left(\frac{\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \ldots}{\mu+\mu'+\mu''+\ldots} - x\right);$$

ou, si l'on pose

$$\frac{\mu a + \mu' a' + \mu'' a''' + \ldots}{\mu+\mu'+\mu''+\ldots} = a_1,$$

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = (\mu+\mu'+\mu''+\ldots)(a_1 - x).$$

On aura de même

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = (\mu+\mu'+\mu''+\ldots)(b_1 - y),$$

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = (\mu+\mu'+\mu''+\ldots)(c_1 - z),$$

en posant

$$\frac{\mu b + \mu' b' + \mu'' b'' + \ldots}{\mu+\mu'+\mu''+\ldots} = b_1,$$

$$\frac{\mu c + \mu' c' + \mu'' c'' + \ldots}{\mu+\mu'+\mu''+\ldots} = c_1.$$

Les équations (1), (2), (3) sont celles du mouvement d'un point attiré par une force dirigée vers un centre fixe G dont les coordonnées sont a_1, b_1, c_1. L'intensité de cette force accélératrice est $(\mu + \mu' + \mu'' + \ldots)\, m\mathrm{G}$; elle varie donc proportionnellement à la distance du point m au centre d'où elle émane. Pour définir la position de ce centre, concevons que les quantités μ, μ', μ'',... représentent des poids dont les centres de gravité soient placés en A, A', A'',... ; le point G sera le centre de gravité du système de tous ces poids; cela résulte évidemment des valeurs de a_1, b_1, c_1.

La détermination du mouvement du point m est ainsi ramenée aux formules connues.

Remarque. — Cette réduction de toutes les forces d'attraction à une seule dirigée vers le centre de gravité du système des poids μ, μ', μ'',..., est une conséquence des propriétés du centre de gravité, et l'on pouvait l'en déduire sans calcul. En effet, prenons sur le prolongement de la droite Gm une distance $m\mathrm{H} = h$, arbitraire, et plaçons en H le centre d'un poids X tel, que le centre de gravité du système μ, μ', μ'',..., X tombe au point m; pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathrm{X}h = (\mu + \mu' + \mu'' + \ldots)\, m\mathrm{G}\,.$$

Or on sait qu'un système de forces égales à μr, $\mu' r'$, $\mu'' r''$,..., Xh, et dirigées respectivement suivant les droites mA, mA', mA'',..., mH serait en équilibre; donc l'une d'elles, la force Xh, est égale et opposée à la résultante de toutes les autres; donc ces dernières ont une résultante dont la grandeur est Xh ou $(\mu + \mu' + \mu'' \ldots)\, m\mathrm{G}$ et dont la direction est la droite mG.

CHAPITRE IV.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE SPHÈRE PESANTE ET INFINIMENT PETITE PLACÉE DANS UN CANAL RECTILIGNE OU CIRCULAIRE QUI SE MEUT SUIVANT UNE LOI DONNÉE.

1. *Déterminer le mouvement d'une sphère infiniment petite, pesante, placée dans un tube cylindrique* OA, *d'un diamètre égal à celui de la sphère, et dont l'axe décrit d'un mouvement uniforme un cône droit autour de la verticale* Oz (fig. 69). On n'a pas égard au frottement.

Le principe des vitesses virtuelles, appliqué à l'équilibre des forces perdues par la sphère de masse m, dont les coordonnées sont (x, y, z), fournit l'équation

$$(1)\qquad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + mg\,\delta z = 0.$$

Soit α l'angle constant zOA, θ l'angle POQ; comme il croît proportionnellement au temps, on aura

$$\theta = nt,$$

en prenant pour le plan des zx la position initiale du plan zOA.

Les liaisons du système sont exprimées par l'équation précédente associée aux équations

$$x = r\sin\alpha\cos\theta,$$
$$y = r\sin\alpha\sin\theta,$$
$$z = r\cos\alpha;$$

on en tire δx, δy, δz, *en ayant soin de ne pas faire varier le temps* t, ou, ce qui revient au même, *l'azimut* θ; car, ici, les liaisons du système dépendent du temps, et le

tube dans lequel la sphère m est assujettie à rester, doit être considéré comme conservant la position qu'il avait au moment où l'on imprime le déplacement virtuel. On a ainsi

$$\delta x = \sin\alpha \cos\theta\, \delta r,$$
$$\delta y = \sin\alpha \sin\theta\, \delta r,$$
$$\delta z = \cos\alpha\, \delta r;$$

l'équation (1) devient, en omettant le facteur m et égalant à zéro le coefficient de δr,

$$\sin\alpha \cos\theta \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\alpha \sin\theta \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right)\cos\alpha = 0.$$

Pour éviter la transformation directe en coordonnées polaires des trois dérivées du second ordre qui entrent dans cette équation, on l'écrira d'abord ainsi :

$$(2) \qquad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + gr\cos\alpha = 0.$$

Or

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr,$$

et

$$x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z = dr^2 + r\,d^2r - (dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

mais on a déjà vu (page 8) comment l'expression

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

se transformait en coordonnées polaires : seulement il faut remarquer qu'ici l'une des deux coordonnées angulaires (α) est constante. On trouve

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\sin^2\alpha \,.\, d\theta^2;$$

par suite, l'équation du mouvement devient, toutes réductions faites,

$$(3) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\sin^2\alpha \frac{d\theta^2}{dt^2} + g\cos\alpha = 0.$$

Si le mouvement donné du tube n'était pas uniforme,

$\frac{d\theta}{dt}$ serait une fonction connue de t, et la question serait ramenée à intégrer une équation linéaire du second ordre à coefficients variables et avec second membre, ce que l'on ne sait pas faire en général; mais, dans le cas qui nous occupe, $\frac{d\theta}{dt}$ est égale à la constante n, et l'équation (3) prend la forme

$$\frac{d^2r}{dt^2} - n^2\sin^2\alpha\left(r - \frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$r - \frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha} = Ae^{nt\sin\alpha} + Be^{-nt\sin\alpha}.$$

Les constantes A et B dépendent de la position et de la vitesse initiales de la sphère dans le tube.

Supposons qu'au commencement du mouvement la sphère ait été placée au sommet O, et lancée dans le tube avec la vitesse k; on aura,

pour $$t = 0;\quad r = 0,\quad \frac{dr}{dt} = k,$$

d'où

$$A = \frac{nk\sin\alpha - g\cos\alpha}{2n^2\sin^2\alpha},\qquad B = -\frac{nk\sin\alpha + g\cos\alpha}{2n^2\sin^2\alpha},$$

et

$$r = \frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha} + \frac{nk\sin\alpha - g\cos\alpha}{2n^2\sin^2\alpha}e^{nt\sin\alpha} - \frac{nk\sin\alpha + g\cos\alpha}{2n^2\sin^2\alpha}e^{-nt\sin\alpha}.$$

Distinguons trois cas :

1°. Soit $$k > \frac{g\cot\alpha}{n}.$$

La valeur de $\frac{dr}{dt}$ que l'on tirera de l'équation précédente, étant constamment positive, r croît sans cesse avec t; le mobile s'éloigne donc indéfiniment de l'origine; la vitesse avec laquelle il décrit le tube croît aussi sans limite, à par-

tir de l'époque où $\frac{dr}{dt}$ atteint un minimum, époque marquée par l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2}=0, \quad \text{d'où} \quad e^{2nt\sin\alpha}=\frac{nk\sin\alpha+g\cos\alpha}{nk\sin\alpha-g\cos\alpha},$$

et alors $r=\frac{g\cot\alpha}{n}$.

2°. Soit
$$k=\frac{g\cot\alpha}{n}.$$

L'expression de r se réduit à

$$r=\frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha}\left(1-e^{-nt\sin\alpha}\right);$$

elle est constamment croissante, mais elle ne saurait dépasser ni même atteindre la limite $\frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha}$: la valeur de $\frac{dr}{dt}$ est décroissante et s'approche indéfiniment de 0. Ainsi le mobile s'éloigne toujours de l'origine et s'approche, avec une vitesse indéfiniment décroissante, d'un point du tube distant de l'origine de la quantité $\frac{g\cos\alpha}{n^2\sin^2\alpha}$, sans jamais l'atteindre.

3°. Soit
$$k<\frac{g\cot\alpha}{n}.$$

En posant $\frac{g\cot\alpha}{n}=k+h$, il vient

$$r=\frac{k+h}{n\sin\alpha}-\frac{1}{2n\sin\alpha}\left[he^{nt\sin\alpha}+(2k+h)e^{-nt\sin\alpha}\right];$$

la valeur de $\frac{dr}{dt}$ s'annule en passant du positif au négatif, pour

$$t=\frac{1}{2n\sin\alpha}\,\mathrm{l}\left(1+\frac{2k}{h}\right);$$

la valeur correspondante de r,

$$r=\frac{h+k-\sqrt{h(h+2k)}}{n\sin\alpha},$$

est un maximum. Le temps continuant à croître, $\frac{dr}{dt}$ est constamment négative, et sa valeur absolue croît jusqu'à l'infini; r décroît jusqu'à l'infini négatif. Ainsi, le mobile, après s'être élevé dans le tube jusqu'à la distance $\frac{h+k-\sqrt{h(h+2k)}}{n\sin\alpha}$, redescendra, atteindra de nouveau l'origine; puis (le tube étant supposé indéfini en longueur), le mobile continuera à le parcourir de haut en bas, avec une vitesse qui ira en croissant jusqu'à l'infini.

Si l'on supposait $\alpha = \frac{\varpi}{2}$, le tube décrirait un plan horizontal, et la pesanteur n'influerait plus sur le mouvement de la sphère qui serait donné par l'équation

$$r = Ae^{nt} + Be^{-nt}.$$

Ce cas a été examiné par Bernoulli.

Pour réaliser l'hypothèse où la sphère ne reçoit pas de vitesse initiale, supposons qu'elle soit retenue dans le tube par un fil inextensible, de longueur $OA = r_0$, attaché au point fixe O (*fig.* 70), et que le fil vienne à se rompre au moment où l'axe du tube fait un angle θ_0 avec l'axe des x; on aura, pour $t = 0$,

$$r = r_0, \qquad \frac{dr}{dt} = 0, \qquad \text{et conséquemment} \qquad A = B = \frac{r_0}{2};$$

donc

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{nt} + e^{-nt}\right).$$

Soit σ l'arc de cercle de rayon OA, décrit pendant le temps t par le point A du tube avec lequel coïncidait la sphère au moment de la rupture du fil; on a

$$\sigma = nr_0 t, \qquad \text{d'où} \qquad r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\frac{\sigma}{r_0}} + e^{-\frac{\sigma}{r_0}}\right).$$

Cette équation, comparée avec celle d'une chaînette de

paramètre r_0, montre que la trajectoire décrite par la sphère n'est autre que la courbe qu'on obtiendrait en construisant d'abord la chaînette LAL′ de paramètre r_0, tangente par son sommet au cercle de rayon OA; puis enroulant la tangente AT sur le cercle, et portant les ordonnées MP de la chaînette de p en m sur les prolongements des rayons.

Considérons enfin le *cas où le tube serait assujetti à tourner d'un mouvement uniforme autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à sa direction*. Ce tube décrit alors un plan vertical, comme une lunette méridienne.

Pour déterminer le mouvement de la sphère à l'aide des calculs précédents, on fera $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on supposera que la pesanteur soit dirigée suivant le prolongement de l'axe des y considéré comme vertical; l'équation (1) prendra la forme

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y\right) + mg\,\delta y = 0;$$

et l'on en tirera la suivante, analogue à l'équation (2),

$$(4)\qquad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + gr\sin\theta = 0.$$

Cette équation s'obtient encore par un autre procédé qu'on aurait pu suivre dans le premier cas : il consiste à introduire la pression N exercée par le tube sur le mobile, ce qui permet de traiter celui-ci comme un point libre. On a ainsi les deux équations :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mathrm{N}\,\frac{y}{r},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= +\mathrm{N}\,\frac{x}{r} - g,\end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\\ y &= r\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

(Nous admettons que le mouvement de révolution du tube tende à augmenter l'angle $AOx = \theta$.)

L'élimination de N redonne l'équation (4). Enfin celle-ci se transforme, comme on l'a vu dans le premier cas, en coordonnées polaires; il vient

$$(6) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} + g \sin\theta = 0.$$

Si l'on y remplace θ par $nt + \omega$, et qu'on intègre, on a

$$r = \frac{g}{2n^2}\sin(nt+\omega) + Ae^{nt+\omega} + Be^{-nt-\omega}.$$

Nous laisserons aux lecteurs le soin de discuter cette intégrale. On pourra, par exemple, supposer que le tube parte de la direction horizontale ($\omega = 0$), et que le mobile n'ait pas de vitesse initiale.

Les équations (5) feront ensuite connaître la valeur de la pression N à chaque instant; on en tire

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} - Nr + gr\cos\theta = 0;$$

or

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = r^2 d\theta,$$

d'où

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt};$$

en remplaçant θ par $nt + \omega$, il vient

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = 2nr\frac{dr}{dt},$$

et, par suite,

$$N = 2n\frac{dr}{dt} + g\cos(nt+\omega) = 2g\cos(nt+\omega)$$
$$+ 2n^2(Ae^{nt+\omega} - Be^{-nt-\omega}).$$

2. *Une roue circulaire porte, à sa circonférence, un canal annulaire, dans l'intérieur duquel on a introduit*

une sphère homogène pesante m, d'un très-petit diamètre égal à celui du canal; cette roue s'appuie par un point B *de sa circonférence, sur un plan horizontal* AOB (fig. 71), *et, par son centre* S, *sur un axe fixe vertical* SO *incliné au plan de la roue d'un angle connu* OSB $= \alpha$. *On suppose qu'on fasse rouler la roue sur le plan horizontal, de manière que son point d'appui décrive un cercle de rayon* OB *avec une vitesse constante. Le cône droit dont l'axe est* SO *et le demi-angle au centre* α, *est ainsi touché successivement, suivant toutes ses génératrices, par le plan de la roue mobile.*

On demande les lois du mouvement du centre de la sphère, abstraction faite du frottement.

(Une solution inexacte de ce problème a été donnée dans le tome XIX des *Annales de Gergonne*, page 360. L'auteur prend pour expression de la force accélératrice effective qui anime le point m, la quantité $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, r étant le rayon de la roue, et θ l'angle que le rayon Sm fait avec un rayon fixe tracé dans le plan de la roue. Mais il y a là une erreur grave, dont l'effet n'est rien moins que de confondre l'élément de la *trajectoire réellement décrite* par le mobile, avec l'élément de la circonférence de la roue.)

Prenons pour axe des z la verticale SO, et faisons passer le plan des zx par l'arête SA, suivant laquelle la roue mobile touchait le cône à l'origine du mouvement; au bout du temps t, soient SB l'arête de contact, SC la position qu'occupe à cette époque, sur le plan de la roue, le rayon qui coïncidait primitivement avec SA; Sm le rayon vecteur de la sphère : sa position sera déterminée par les angles

$$m\text{SO} = \varphi \quad \text{et} \quad \text{PS}x = \psi,$$

SP étant la projection horizontale de Sm; mais ces deux angles ne sont pas indépendants l'un de l'autre.

Soit θ l'angle variable CSm; si l'on désigne par k la vitesse constante et donnée avec laquelle l'angle AOB est décrit, on aura

$$\text{angle AOB} = kt;$$

et comme il résulte de la nature du mouvement que

$$\text{arc AB} = \text{arc BC},$$

on en conclut

$$\text{angle BSC} = kt \sin\alpha,$$

et

$$\text{angle } m\text{SB} = \theta - kt \sin\alpha :$$

nous désignerons, pour abréger, ce dernier angle par ω,

$$(1) \qquad \omega = \theta - kt \sin\alpha.$$

Cela posé, il est facile d'exprimer les angles φ et ψ en fonction de ω. En effet, l'angle trièdre rectangle $SOmB$ donne d'abord

$$(2) \qquad \cos\varphi = \cos\alpha \cos\omega.$$

Soit SB′ la projection horizontale de l'arête SB; on a

$$\psi = \text{PSB}' + \text{B}'\text{S}x = \text{PSB}' + \text{BOA} = \text{PSB}' + kt.$$

PSB′ mesure l'angle dièdre qui a pour arête SO dans le trièdre déjà considéré. On a donc

$$\text{tang PSB}' = \frac{\text{tang}\,\omega}{\sin\alpha};$$

par conséquent,

$$(3) \qquad \psi = kt + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\text{tang}\,\omega}{\sin\alpha}\right).$$

A l'aide des formules (2) et (3), le problème est ramené à déterminer ω en fonction du temps. Comme nous n'avons ici qu'une *seule fonction variable* ω, il suffira d'employer une seule des équations de Lagrange,

$$\frac{d.\frac{d\text{T}}{d\omega'}}{dt} - \frac{d\text{T}}{d\omega} - \frac{d\text{V}}{d\omega} = 0,$$

où V désigne la fonction des forces et T la moitié de la

force vive du mobile. On a

$$V = mgr\cos\varphi = mgr\cos\alpha\cos\omega,$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\varphi^2}{dt^2}+\sin^2\varphi\frac{d\psi^2}{dt^2}\right),$$

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt}.$$

Si l'on substitue pour φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ leurs valeurs tirées des formules (2) et (3), on trouve que l'expression de T se réduit à cette forme très-simple,

$$T = \frac{1}{2}mr^2[\omega'^2 + 2\sin\alpha.k\omega' + (1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2].$$

En définitive, l'équation du mouvement est

$$r\frac{d^2\omega}{dt^2} - r\cos^2\alpha\cos\omega\sin\omega\, k^2 + g\cos\alpha\sin\omega = 0;$$

en la multipliant par $2\,d\omega$, on l'intègre une première fois, et l'on a

$$(4)\qquad r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + k^2r\cos^2\alpha\cos^2\omega - 2g\cos\alpha\cos\omega + c = 0,$$

c étant une constante arbitraire, qu'on déterminera d'après les circonstances initiales. Enfin, le calcul de ω en fonction de t est ramené à une quadrature

$$(5)\qquad t = \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\pm\sqrt{r}.d\omega}{\sqrt{2g\cos\alpha.\cos\omega - k^2r\cos^2\alpha\cos^2\omega - c}};$$

cette intégrale ne peut être calculée que par approximation, excepté pour certaines valeurs de c. Si l'on fait $k=0$, ce qui revient à supposer la roue immobile, ω se confond avec θ, et l'on retrouve la formule ordinaire du pendule simple; seulement, la gravité g est ici remplacée par sa composante $g\cos\alpha$ dans le plan de la roue.

ω étant connu en fonction de t par l'intégrale précédente, les équations (1), (2) et (3) donnent θ, φ et ψ en

fonction de la même variable. L'élimination de t entre les expressions de φ et ψ fournit ensuite l'équation polaire de la surface conique décrite par le rayon vecteur de la sphère. Si l'on transforme cette dernière équation en coordonnées rectilignes, au moyen des relations

$$z = r\cos\varphi, \quad \tang\varphi = \frac{y}{x},$$

cette transformée, combinée avec l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

détermine la courbe à double courbure décrite par le centre de la sphère dans l'espace; enfin la vitesse de la sphère dans sa trajectoire sera également connue en fonction du temps par la formule

$$v^2 = r^2\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + 2k\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} + (1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2\right].$$

Considérons le cas particulier où l'on aurait, à l'origine du mouvement,

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = k\sin\alpha.$$

C'est ce qui aura lieu si la sphère est primitivement en A dans le canal, et qu'elle y reçoive une vitesse initiale précisément égale à celle avec laquelle le rayon SA décrit la circonférence de la roue. Dans cette hypothèse, l'équation (4) donne

$$c = 2g\cos\alpha - k^2r^2\cos^2\alpha,$$

et cette valeur, substituée dans l'équation (5), conduit à l'intégrale

$$t = \sqrt{r}\int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\cos\omega)\left[k^2r\cos^2\alpha(1+\cos\omega) - 2g\cos\alpha\right]}},$$

qu'on peut obtenir sous forme finie; car, en posant

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = u,\quad k^2 r\cos^2\alpha - g\cos\alpha = a,\quad g\cos\alpha = b,$$

cette intégrale devient

$$t = \sqrt{r}\int\frac{du}{u\sqrt{a-bu^2}} = \sqrt{\frac{r}{a}}\,\mathrm{l}\left(\frac{-\sqrt{a-bu^2}+\sqrt{a}}{u}\right),$$

et, en remplaçant u par sa valeur, on a

$$c'e^{t\sqrt{\frac{a}{r}}} = \frac{-\sqrt{a-b\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega}+\sqrt{a}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}.$$

Pour déterminer c', on fait, dans cette équation, $t = 0$ et $\omega = 0$, d'où l'on conclut $c' = 0$, et, par conséquent, *tang* $\frac{1}{2}\omega$ *sera constamment nul.*

Ainsi, dans l'état initial supposé, la sphère ne quitterait pas le plan horizontal, et décrirait le cercle AB avec une vitesse constante égale à $kr\sin\alpha$.

La formule (5) s'intégrerait encore complétement, si l'on supposait un état initial tel, que la constante c fût nulle, et qu'en outre le coefficient de $\cos\omega$ sous le radical fût égal à celui de $\cos^2\omega$. Soient θ_0 et $\frac{d\theta_0}{dt}$ les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$: l'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons entraîne les deux conditions

$$\left(\frac{d\theta_0}{dt} - k\sin\alpha\right)^2 = k^2\cos^2\alpha\cos\theta_0(1-\cos\theta_0),$$

$$2g = k^2 r\cos\alpha;$$

l'expression de dt prend alors la forme

$$dt = \pm\sqrt{\frac{r}{h}}\frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega(1-\cos\omega)}},$$

en désignant, pour abréger, $g\cos\alpha$ par h.

Si l'on fait

$$\tang \tfrac{1}{2}\,\omega = u,$$

il vient (en prenant d'abord le signe +, ce qui suppose que ω croisse avec t)

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}}\,\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u} = c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}.$$

Pour $t = 0$, on a

$$\tang \frac{1}{2}\,\omega \quad \text{ou} \quad u = \tang \frac{1}{2}\,\theta_0;$$

donc

$$c' = \frac{1-\sqrt{1-\tang^2 \frac{1}{2}\,\theta_0}}{\tang \frac{1}{2}\,\theta_0}.$$

Pour que cette valeur soit réelle, il faut que l'angle θ_0 soit au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et alors la constante c' sera plus petite que 1, ou au plus égale à 1 pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Résolvons l'intégrale précédente par rapport à u, et remplaçons cette variable par $\tang \frac{1}{2}\,\omega$; nous aurons

$$\tang \frac{1}{2}\,\omega = \frac{2c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2 e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}.$$

En prenant le signe — dans l'expression de dt, on arrive à la même intégrale.

La valeur de $\tang \frac{1}{2}\,\omega$ peut s'écrire $\frac{2M}{M^2+1}$, en posant

$$c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = M.$$

La dérivée de cette quantité, par rapport à M, est $\frac{2(1-M^2)}{(M^2+1)^2}$; par conséquent, tant que l'on aura $M < 1$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ ira en croissant avec le temps. La variable ω atteindra donc un maximum pour la valeur de t qui satisfera à la condition

$$c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = 1, \quad \text{d'où} \quad t\sqrt{\frac{h}{r}} = \mathrm{l}\left(\frac{1}{c'}\right)$$

(on a vu ci-dessus que $\frac{1}{c'}$ est plus grand que 1); à cette époque

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = 1,$$

et, par suite,

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ce maximum de ω s'accorde bien avec l'expression différentielle

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega\,(1-\cos\omega)}}.$$

Le temps continuant à croître, ω décroît, puisque la dérivée de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ devient négative, et ce décroissement continue indéfiniment, sans que ω se réduise à zéro autrement que pour $t = \infty$.

La formule (1) donnera l'expression de θ en fonction explicite de t,

$$\theta = kt\sin\alpha + 2.\operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang}\frac{2c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}\right\};$$

mais la recherche des maxima et minima de cette variable serait dépourvue d'intérêt.

CHAPITRE V.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ASSUJETTI A DÉCRIRE UNE COURBE PLANE TELLE, QUE LA PRESSION EXERCÉE SUR LA COURBE SOIT DANS UN RAPPORT DONNÉ AVEC LA FORCE CENTRIFUGE.

1. *Un point matériel pesant est assujetti à descendre dans un plan vertical, le long d'une courbe telle, que le rapport de la pression exercée en chaque point par le mobile à la force centrifuge soit constant. On propose de déterminer cette courbe.*

Soit AmB (*fig.* 72) la courbe cherchée que nous rapporterons à deux axes rectangulaires Ox, Oy, ce dernier dirigé dans le sens de la pesanteur. La pression au point m a pour valeur $\left(\frac{v^2}{\rho} \pm g\frac{dx}{ds}\right)$, le signe $+$ convient aux courbes concaves vers l'axe des x, et le signe $-$ aux courbes convexes; par conséquent, si l'on désigne par $(n+1)$ le rapport constant de cette force à la force centrifuge $\frac{v^2}{\rho}$, on doit avoir

$$(1) \qquad g\frac{dx}{ds} = \pm n\frac{v^2}{\rho}.$$

Soit $2gh$ le carré de la vitesse au point de départ du mobile dont l'ordonnée est y_0; le principe des forces vives donne

$$v^2 = 2g(y - y_0 + h) = 2g(y - k),$$

en posant, pour abréger, $y_0 - h = k$.

On a d'ailleurs

$$\rho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{pdp}{dy}}, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}};$$

on regarde l'arc s comme croissant avec x; le signe $+$ de l'expression de ρ convient aux courbes convexes vers l'axe des x, et le signe $-$ aux courbes concaves.

Lorsqu'on substituera ces valeurs dans l'équation (1), le double signe disparaîtra, et l'on aura

$$\frac{-dy}{n(y-k)} = \frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Bien que le facteur g ait disparu de cette équation, il n'en faut pas conclure que la courbe cherchée sera indépendante de l'intensité de la pesanteur; car h, qui est le rapport du carré d'une vitesse à $2g$, et par suite k, dépendent de cette intensité.

En intégrant, il vient

$$\left(\frac{c}{y-k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1+p^2,$$

c étant une constante arbitraire; on en tire

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{c}{y-k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1},$$

et

$$(2) \qquad dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{\left(\frac{c}{y-k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}}.$$

La détermination de la trajectoire est ainsi ramenée à une quadrature qui n'est exécutable que pour certaines valeurs de n. On peut se contenter de prendre le radical avec le signe $+$, ce qui donnera les points de la courbe dont l'y croît avec x; car l'intégrale qu'on obtient ainsi est générale. En prenant le signe $-$, on retomberait sur le même résultat.

La différentielle précédente peut s'intégrer dans quatre

cas, savoir :

$$n = +1, \quad n = -1, \quad n = +\tfrac{1}{2}, \quad n = -\tfrac{1}{2}.$$

D'après la valeur de la pression $(n+1)\frac{v^2}{\rho}$, les valeurs positives de n doivent répondre à des courbes concaves vers l'axe des x, et les valeurs négatives de n à des courbes convexes. Examinons ces différents cas.

1°. $n = 1$. *La pression est double de la force centrifuge.*

La formule (2) devient

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{c}{y-k} - 1}},$$

équation d'une cycloïde dont la base horizontale est distante de l'axe Ox de la quantité $k = y_0 - h$, et dont le cercle générateur a pour rayon $\frac{c}{2}$.

Soit $\quad PO = y_0, \quad PC = h; \quad$ on aura $\quad OC = k.$

La base de la cycloïde sera l'horizontale CDE. Si l'on supposait $h = 0$, c'est-à-dire si le mobile partait du point A sans vitesse initiale, l'origine de la cycloïde serait au point A lui-même. Le rayon $\frac{c}{2}$ du cercle générateur restera arbitraire tant qu'on n'assignera pas un second point B par lequel doit passer la courbe; si ce point est donné, on exprimera que ses coordonnées vérifient l'équation finie de la cycloïde, d'où l'on conclura la valeur de c; ou bien on pourra déterminer c par une construction géométrique fondée sur ce que toutes les cycloïdes sont des courbes semblables, ainsi qu'on le fait dans le problème de la brachistochrone.

Il résulte des calculs précédents que la courbe jouissant de la propriété que la pression exercée en chaque point par un mobile pesant assujetti à la parcourir est double de la force centrifuge, n'est autre que la brachistochrone.

Nous généraliserons plus bas cette propriété.

2°. $n = -1$. *La pression est constamment nulle.*

La formule (2) donne

$$dx = \frac{\sqrt{c}\,dy}{\sqrt{y-k-c}},$$

l'intégrale est

$$(x-c')^2 = 4c(y-k-c);$$

elle représente une parabole dont l'axe est vertical, et qui tourne sa convexité du côté de l'axe des x.

Ce résultat pouvait être prévu d'après les lois du mouvement d'un projectile dans le vide; on sait, en effet, qu'il décrit *librement* une parabole dont l'axe est parallèle à la direction de la pesanteur, et dont la tangente à l'origine est la direction de la vitesse initiale. Il est clair que si l'on assujettit le mobile à se mouvoir dans un canal ayant précisément la forme de cette parabole, il n'y aura aucune réaction de la part du mobile contre les parois du canal.

3°. $n = \frac{1}{2}$. *La pression est à la force centrifuge comme* 3 *est à* 2.

On a

$$dx = \frac{(y-k)\,dy}{\sqrt{c^2-(y-k)^2}};$$

d'où

$$(x-c')^2 + (y-k)^2 = c^2,$$

équation d'un cercle de rayon arbitraire c, et dont le centre est distant de l'axe Ox de la quantité $k = y_0 - h$.

4°. $n = -\frac{1}{2}$. *La pression est moitié de la force centrifuge.*

On a

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{(y-k)^2-c^2}};$$

d'où

$$\frac{x-c'}{c} = \mathrm{l}\left[\frac{y-k+\sqrt{(y-k)^2-c^2}}{c}\right].$$

En transportant l'origine au point $(x = c', y = k)$, cette intégrale prend la forme

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

c'est l'équation d'une chaînette dont le sommet est à la distance c de l'axe des x.

2. Nous avons reconnu plus haut, dans le cas d'un mobile pesant, une propriété caractéristique de la brachistochrone, savoir : qu'elle est la courbe telle, que la pression exercée en chaque point par le mobile assujetti à la décrire est double de la force centrifuge. Cette propriété s'étend à la courbe plane décrite par un point matériel sous l'action d'une force quelconque, pourvu que le principe des forces vives ait lieu : c'est ce que nous allons faire voir.

Considérons un point matériel assujetti à rester dans un plan, et sollicité par une force dont les composantes X, Y satisfont à la condition

$$X\,dx + Y\,dy = d.\varphi(x, y).$$

En désignant par v la vitesse du mobile, on a

(3) $$v^2 = 2\varphi(x, y) + c,$$

c étant une constante arbitraire; et, par suite,

$$X = \frac{v\,dv}{dx}, \quad Y = \frac{v\,dv}{dy}.$$

Soit $(n + 1)$ le rapport de la pression à la force centrifuge; les équations différentielles du mouvement prendront la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx} + (n+1)\frac{v^2}{\rho}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v\frac{dv}{dy} - (n+1)\frac{v^2}{\rho}\frac{dx}{ds}.$$

Pour en déduire l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps t; à cet effet, il n'est pas nécessaire de combiner entre elles ces deux équations: la première suffit, en ayant égard à l'équation (3), qui fait déjà connaître v en fonction de x et y.

On a
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}; \quad \text{or} \quad dt=\frac{ds}{v};$$
donc
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{v\,d.\frac{v\,dx}{ds}}{ds}=v^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+v\frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds}.$$

Par cette transformation, $\frac{d^2x}{dt^2}$ est exprimée en fonction de différentielles où la variable indépendante n'est plus le temps, mais telle variable qu'on voudra, l'arc s par exemple.

On a d'ailleurs
$$\frac{1}{\rho}\frac{dy}{ds}=\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds};$$
ces valeurs étant substituées dans la première des équations du mouvement, il vient, toutes réductions faites,

$$(4) \qquad nv\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\frac{dv}{dx}-\frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds}=0.$$

Cette équation, dans laquelle v doit être remplacée par $\sqrt{2\varphi(x,y)+c}$, ne renferme plus le temps; c'est donc l'équation de la trajectoire.

On aurait pu l'obtenir plus simplement en partant de l'expression connue de la pression N sur une courbe plane,
$$N=\frac{v^2}{\rho}+R\cos\theta,$$

R désignant la force et θ l'angle que sa direction fait avec la normale dirigée en dehors de la courbe. Car on a

$$R\cos\theta = -v\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds} + v\frac{dy}{dv}\frac{dx}{ds},$$

$$N = (n+1)\frac{v^2}{\rho};$$

donc

$$(n+1)\frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} - v\left(\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds} - \frac{dv}{dy}\frac{dx}{ds}\right).$$

Réduisant, et remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par la valeur employée ci-dessus, on a l'équation (4).

Actuellement, supposons que le rapport constant de la pression à la force centrifuge doive être égal à 2; on aura $n = 1$, et l'équation (4) deviendra

$$(5)\qquad v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dv}{dx} - \frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds} = 0.$$

Il s'agit de démontrer que cette équation est celle d'une brachistochrone, c'est-à-dire de la courbe qu'un mobile, sollicité par la force dont les composantes sont $\frac{v\,dv}{dx}$, $\frac{v\,dv}{dy}$, doit suivre pour aller d'un point (x_0, y_0) à un autre (x_1, y_1) dans le moindre temps possible.

En désignant par s l'arc de la brachistochrone qui doit être parcouru, la condition du minimum s'exprime par

$$\int_0^s \delta.\frac{ds}{v} = 0,$$

ou

$$\int_0^s \left(\frac{1}{v}\delta ds + ds\,\delta\frac{1}{v}\right) = 0;$$

v est une fonction connue de x et y,

$$v = \sqrt{2\varphi(x, y, z) + c},$$

et les limites de l'intégrale étant supposées fixes, on peut se borner à faire varier l'une des deux coordonnées, x par exemple : on a ainsi

$$\delta \frac{1}{v} = \frac{d\frac{1}{v}}{dx} \delta x;$$

d'ailleurs

$$ds\,\delta\,ds = dx\,\delta\,dx = dx\,d\,\delta x,$$

on a donc

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{v} \frac{dx}{ds} d\,\delta x + ds \frac{d\frac{1}{v}}{dx} \delta x \right) = 0.$$

Intégrant par parties le terme affecté de la double caractéristique $d\,\delta$, puis égalant à zéro le coefficient de δx sous le signe $\int$, on a

$$ds \frac{d\frac{1}{v}}{dx} - d\frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{ds}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\frac{dv}{v^2} = 0,$$

ou enfin

$$ds\left(v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dv}{dx} \right) - dv\frac{dx}{ds} = 0.$$

C'est l'équation (5). C. Q. F. D.

CHAPITRE VI.

DE LA COURBE SYNCHRONE. — THÉORÈMES SUR LES BRACHISTOCHRONES.

1. *On suppose une série de cycloïdes* Am, Am',..., *situées dans un plan vertical, issues d'un même point* A, *et ayant leurs bases sur une même horizontale* Ax (fig. 73); *on propose de déterminer le lieu des points* m, m',..., *tels que les arcs de cycloïdes,* Am, Am',... *soient parcourus dans le même temps par un point matériel pesant, parti de* A *sans vitesse initiale, et assujetti à décrire successivement ces diverses courbes.*

Ce lieu géométrique a reçu le nom de *courbe synchrone*.

Désignons par $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ le temps nécessaire pour parcourir les arcs de cycloïdes Am, Am',...; h sera l'espace vertical que décrirait dans le même temps un mobile en chute libre; prenons sur la verticale Ay une longueur AB $= h$, B sera le point de la courbe synchrone correspondant à une cycloïde dont le cercle générateur serait infini. Soient OS $= a$ le rayon du cercle générateur de la cycloïde Am, x et y les coordonnées du point m, rapportées aux axes Ax et Ay; on aura

$$\left\{\begin{aligned} &x = a.\operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2},\\ &\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a};\end{aligned}\right.$$

ou réduisant,

$$\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a-y}{a}\right) = \sqrt{\frac{2h}{a}}, \tag{1}$$

$$x = \sqrt{2ah} - \sqrt{2ay-y^2}. \tag{2}$$

L'élimination de a entre ces deux équations fournira l'équation du lieu cherché.

On peut le construire par points de la manière suivante : si l'on mène du point m au cercle InS, l'horizontale mn, on a

$$\text{arc } \mathrm{I}n = a \,.\, \text{arc} \cos \frac{a-y}{a},$$

et, en vertu de l'équation (1),

$$\text{arc } \mathrm{I}n = \sqrt{2ah} = \sqrt{\mathrm{IS}.\mathrm{AB}}.$$

Ainsi, en prenant un arc In, dont la longueur soit moyenne proportionnelle entre AB et IS ; puis, menant par le point n une horizontale, le point m où cette droite coupera la cycloïde AmS, appartiendra au lieu cherché. En faisant varier le diamètre IS, on construira autant de points que l'on voudra.

Sans éliminer a entre les équations (1) et (2), nous allons démontrer la principale propriété de la courbe synchrone ; c'est *qu'elle coupe à angle droit toutes les cycloïdes*.

Différentions l'équation (2) en y regardant a comme une fonction de y déterminée par l'équation (1) ; il vient

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a-y}{\sqrt{2ay-y^2}} + \left(\sqrt{\frac{h}{2a}} - \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}\right)\frac{da}{dy},$$

et l'équation (1) donne

$$\left(\sqrt{\frac{h}{2a}} - \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}\right)\frac{da}{dy} = \frac{-a}{\sqrt{2ay-y^2}}.$$

Éliminant $\frac{da}{dy}$, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-2a}{\sqrt{2ay-y^2}} = -\sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{2a-y}}.$$

Tel est le coefficient angulaire de la tangente à la synchrone.

Or l'équation différentielle de la cycloïde correspondante au même rayon a, est

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

Le produit de ces deux coefficients différentiels est égal à -1, ce qui démontre la proposition énoncée.

2. *Parmi toutes les cycloïdes qui ont une même origine* A, *et leurs bases sur une même horizontale, déterminer celle qu'un corps pesant, parti de* A *sans vitesse initiale, doit suivre pour atteindre, dans le moindre temps possible, une ligne donnée* BC, *droite ou courbe* (fig. 74).

Il est aisé de reconnaître que la cycloïde cherchée doit couper à angle droit la ligne BC. En effet, s'il en était autrement, et qu'elle eût la position de la cycloïde Am' qui coupe BC sous un angle aigu T$m'm$, la synchrone qui passe par le point m', et qui coupe à angle droit la cycloïde Am', étant prolongée au delà de m', passerait dans l'angle obtus mm'T$'$, et conséquemment elle irait couper la cycloïde Am, orthogonale à BC, en un point I situé au delà de m par rapport à l'origine; l'arc Am moindre que AI serait parcouru dans un temps moindre que ce dernier, et par suite, dans un temps moindre que Am', ce qui est contre l'hypothèse.

Au reste, cette proposition n'est qu'un cas particulier de ce théorème connu : *la brachistochrone coupe à angle droit la courbe d'arrivée.*

Supposons que la ligne BC soit droite; mB étant normale à la cycloïde cherchée Am, B sera le point de contact du cercle générateur dans la position correspondante au point m, en sorte que l'on aura

$$\text{AB} = \text{arc B}m.$$

Donc, si l'on décrit un cercle auxiliaire $B\mu\sigma$ qui touche en B la droite AB, la proportion

$$\text{arc } B\mu : AB :: B\sigma : BS$$

fera connaître le diamètre BS du cercle générateur de la cycloïde cherchée.

Dans le cas particulier où la droite BC sera verticale, le point m où elle sera rencontrée par la cycloïde sera le sommet de celle-ci, et la circonférence du cercle générateur sera double de AB.

Analytiquement, si l'on désigne par m le coefficient angulaire de la droite BC, et par d la longueur AB, on aura, pour déterminer la cycloïde et le point d'incidence m, les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} m &= -\sqrt{\frac{y}{2a-y}},\\ 1-\frac{y}{a} &= \cos\frac{d}{a}. \end{aligned}\right.$$

Quand $m=\infty$, on a $y=2a$, et, par suite, $d=\pi a$. Le point m est alors au sommet S de la cycloïde.

(Cette question avait été proposée par Jacques Bernoulli à son frère Jean, avec promesse d'un prix de cinquante écus : *Actes de Leipsig*, 1697.)

3. La question précédente est comprise comme cas particulier dans une proposition qui sera énoncée plus bas, après que nous aurons généralisé la notion des courbes brachistochrones.

Nous considérerons un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface donnée dont l'équation est

$$F(x, y, z)=0,$$

et sollicité par une force dont les composantes satisfont à la condition

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=d.\varphi(x, y, z).$$

La brachistochrone est la courbe que ce mobile doit suivre pour aller d'un point de la surface à un autre dans un temps plus court qu'en suivant toute autre courbe voisine située sur cette surface.

La méthode des variations, appliquée comme on l'a fait dans la question précédente, fournira pour les équations de la brachistochrone,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx} - \dfrac{d.\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \dfrac{\dfrac{d\frac{1}{v}}{dy} - \dfrac{d.\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}}, \\ F(x, y, z) = 0; \end{array}\right.$$

v désigne la vitesse du mobile, et l'on a

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + c.$$

Cela posé, voici la proposition de Bernoulli généralisée : si l'on suppose une série de brachistochrones issues d'un même point A et situées sur une surface donnée, le lieu des points M, M' tels, que les arcs AM, AM' soient parcourus dans le même temps par un mobile animé d'une même vitesse initiale, est une courbe qui coupe à angle droit chaque brachistochrone.

(Le lecteur pourra consulter, pour la démonstration de ce théorème et des suivants, une Thèse de M. Roger insérée dans le tome XIII du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville.)

4. Nous terminerons ce chapitre en énonçant quelques autres propositions faciles à démontrer sur les brachistochrones.

1°. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de départ du mobile où la vitesse v sera supposée nulle; on aura, pour un point quelconque x, y, z,

$$v^2 = 2[\varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0)].$$

Cela posé, la brachistochrone coupera à angle droit, au point de départ, la courbe d'intersection des deux surfaces

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ v = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y, z) = \text{const.} \end{cases}$$

La surface $[\varphi(x, y, z) = \text{const.}]$ pour tous les points de laquelle v a la même valeur, est dite *surface de niveau*. Par chaque point de la surface $[F(x, y, z) = 0]$, il passe une surface de niveau, et l'intersection des deux surfaces est dite *courbe de niveau*; la proposition précédente peut donc s'énoncer ainsi :

Au point de départ, et plus généralement *aux points de la trajectoire où la vitesse du mobile se trouvera nulle, la brachistochrone coupera à angle droit la courbe de niveau correspondante.*

2°. Si la surface $[F(x, y, z) = 0]$ se confond avec une surface de niveau $[\varphi(x, y, z) = \text{const.}]$, la brachistochrone se réduira à la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface du point de départ au point d'arrivée, dite *ligne géodésique*.

3°. La surface $[F(x, y, z) = 0]$ restant quelconque, si le mobile lancé avec une vitesse initiale n'est soumis à l'action d'aucune force, la brachistochrone se réduira encore à la ligne géodésique.

CHAPITRE VII.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL PESANT ASSUJETTI A DÉCRIRE UNE COURBE DONNÉE DANS UN MILIEU RÉSISTANT. — DIVERS CAS DE TAUTOCHRONISME.

---

1. *Un point matériel pesant se meut dans un milieu dont la résistance* R *est supposée proportionnelle au carré de la vitesse* v,

$$R = nv^2;$$

ce point est en outre assujetti à décrire dans un plan vertical la courbe définie par l'équation

$$(1) \qquad ax = e^{ns} - ns - 1$$

(dans laquelle s désigne l'arc compté à partir du point le plus bas, x l'abscisse de l'extrémité de cet arc rapportée à un axe vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur, a un paramètre constant).

On propose de déterminer les lois du mouvement.

Soit A le point le plus bas de la courbe (*fig.* 75), et supposons que le mobile descende de B vers A; la force tangentielle au point m ayant pour expression

$$g\frac{dx}{ds} - n\frac{ds^2}{dt^2},$$

l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\frac{dx}{ds} - n\frac{ds^2}{dt^2} = 0.$$

On tire de l'équation (1)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{n(e^{ns} - 1)}{a},$$

valeur qu'il faut substituer dans l'équation précédente; il vient

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ng}{a}(e^{ns}-1)-n\frac{ds^2}{dt^2}=0.$$

Pour intégrer, on change de variable indépendante en posant

$$\frac{ds}{dt}=u,\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{udu}{ds},$$

et l'on est conduit à une équation linéaire du premier ordre dont l'intégrale est

$$u^2=e^{2ns}\left[c-\frac{g}{a}(e^{-2ns}-2e^{-ns})\right].$$

Nous supposerons, pour déterminer la constante c, que le mobile part du point B sans vitesse initiale. Soit α la longueur de l'arc AB; on aura, pour $s=\alpha$,

$$u=0,\quad \text{d'où}\quad c=\frac{g}{a}(e^{-2n\alpha}-2e^{-n\alpha});$$

et substituant cette valeur, il vient

$$u^2 \quad \text{ou}\quad \frac{ds^2}{dt^2}=\frac{g}{a}e^{2ns}(e^{-2n\alpha}-2e^{-n\alpha}-e^{-2ns}+2e^{-ns}),$$

ou

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{g}{a}e^{2ns}[(e^{-n\alpha}-1)^2-(e^{-ns}-1)^2].$$

Cette équation donnera la vitesse du mobile en chaque point de la trajectoire, quand on connaîtra la valeur de l'arc s en ce point.

On obtient ensuite t en fonction de s par une quadrature; à cet effet, on tire de l'équation précédente la valeur de dt. Si l'on pose

$$e^{-ns}-1=z,\quad e^{-n\alpha}-1=z_\alpha,$$

il vient

$$ndt=\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{-dz}{\sqrt{z_\alpha^2-z^2}};$$

d'où

$$nt\sqrt{\frac{g}{a}} = \text{arc cos}\,\frac{z}{z_\alpha}, \quad \text{ou} \quad z = z_\alpha \cos nt\sqrt{\frac{g}{a}};$$

et remplaçant z, z_α par leurs valeurs, on a

$$1 - e^{-ns} = (1 - e^{-n\alpha})\cos nt\sqrt{\frac{g}{a}},$$

ou enfin

$$(2) \qquad s = -\frac{1}{n}\,\mathrm{l}\left[1 - (1 - e^{-n\alpha})\cos nt\sqrt{\frac{g}{a}}\right].$$

Pour avoir le temps T que met le mobile à descendre de B en A, il faut faire dans l'une ou l'autre des deux dernières formules, $s = 0$, d'où

$$T = \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Cette valeur est indépendante de α. Ainsi, *quelle que soit la hauteur du point de départ, le mobile arrivera toujours dans le même temps au point le plus bas de sa trajectoire.* La courbe que représente l'équation (1) est donc *tautochrone,* pour le milieu résistant dont il s'agit.

Actuellement, de l'équation (2) on tire aisément la vitesse $\left(v = -\frac{ds}{dt}\right)$ en fonction du temps; il vient

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{(1 - e^{-n\alpha})\sin nt\sqrt{\frac{g}{a}}}{1 - (1 - e^{-n\alpha})\cos nt\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

Au point A, $$v = (1 - e^{-n\alpha})\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas à la discussion de la formule précédente, non plus qu'à l'examen du cas où la valeur de α est supposée assez petite pour qu'on puisse négliger son carré.

2. *La même trajectoire étant donnée*, proposons-nous de *déterminer les lois du mouvement, en supposant que la résistance du milieu soit en partie proportionnelle à la première puissance de la vitesse, et en partie proportionnelle à son carré.*

Soit donc

$$R = mv + nv^2.$$

Bien que la loi de la résistance soit changée, il est remarquable, ainsi qu'on va le voir, que *l'introduction du terme mv dans l'expression de* R, *n'altère pas le tautochronisme.*

L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + g\frac{dx}{ds} + m\frac{ds}{dt} - n\frac{ds^2}{dt^2} = 0,$$

$\left(v = -\frac{ds}{dt}\right)$; et, si l'on remplace $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{n(e^{ns}-1)}{a}$, on a

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ng}{a}(e^{ns}-1) + m\frac{ds}{dt} - n\frac{ds^2}{dt^2} = 0.$$

Le simple changement de variable, employé dans le problème précédent, ne suffirait plus ici pour intégrer l'équation.

Posons, avec Euler,

$$\frac{ds}{dt} = (e^{ns}-1)u,$$

d'où

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = (e^{ns}-1)^2\frac{u\,du}{ds} + ne^{ns}(e^{ns}-1)u^2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation différentielle, et supprimant le facteur commun $e^{ns}-1$, on trouve

$$(e^{ns}-1)\frac{u\,du}{ds} + \frac{ng}{a} + mu + nu^2 = 0:$$

les variables se séparent immédiatement. Posons, pour abréger, $\frac{ng}{a} = \lambda$; nous aurons

$$\frac{ds}{e^{ns} - 1} = -\frac{u\,du}{\lambda + mu + nu^2}.$$

Or,

$$\int \frac{ds}{e^{ns} - 1} = \int \frac{e^{-ns}\,ds}{1 - e^{-ns}} = -\frac{1}{n}\,\mathrm{l}\,(1 - e^{-ns}),$$

et

$$\int \frac{u\,du}{\lambda + mu + nu^2} = \frac{1}{2n}\,\mathrm{l}\,(\lambda + mu + nu^2) - \frac{m}{2n}\int \frac{du}{\lambda + mu + nu^2}.$$

L'intégrale $\int \frac{du}{\lambda + mu + nu^2}$ s'exprimera par la méthode ordinaire, au moyen d'un arc tangente ou d'un logarithme, selon que les racines de l'équation $\lambda + mu + nu^2 = 0$ seront imaginaires ou réelles.

On a d'ailleurs

$$dt = \frac{ds}{(e^{ns} - 1)\,u},$$

donc

$$dt = \frac{-du}{\lambda + mu + nu^2}.$$

Ainsi, le temps nécessaire au mobile pour décrire un arc de sa trajectoire dépend de la même intégrale $\int \frac{du}{\lambda + mu + nu^2}$.

Au point de départ,

$$s = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad u = 0.$$

Au point le plus bas,

$$s = 0, \quad u = \infty.$$

Soit donc T le temps que met le mobile à descendre de B en A; on aura

$$\mathrm{T} = \int_0^{\infty} \frac{-du}{\lambda + mu + nu^2}.$$

Ce temps est évidemment indépendant de α; ainsi, la courbe est encore tautochrone.

En intégrant par arc tangente, ce qui suppose

$$4\lambda n - m^2 > 0,$$

on trouve

$$T = \frac{2}{\sqrt{4\lambda n - m^2}}\left(\text{arc tang}\frac{m}{\sqrt{4\lambda n - m^2}} - \frac{\pi}{2}\right).$$

L'équation (1) ne renfermant pas le coefficient m, il en résulte que *la courbe tautochrone restera la même, quelle que soit la partie de la résistance du milieu proportionnelle à la première puissance de la vitesse*. Mais le temps de la descente est modifié par ce coefficient.

3. Cette propriété du tautochronisme a été établie, d'une manière générale, par Lagrange (*).

Cet illustre géomètre a donné, pour expression générale de la force tangentielle F sur une courbe tautochrone,

$$F = \frac{v^2}{\xi}\left[\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{d\xi}{ds}\right];$$

v désigne la vitesse du mobile, ξ une fonction quelconque de l'arc s, et $\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)$ une fonction quelconque du rapport $\frac{v}{\xi}$.

En disposant convenablement des deux fonctions arbitraires ξ et ϖ, on peut vérifier que cette formule reproduit bien la composante tangentielle de la force qui sollicite le mobile dans le problème précédent.

En effet, prenons

$$\xi = \lambda(e^{ns} - 1)$$

et

$$\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) = \frac{\xi^2}{v^2} - m\frac{\xi}{v} + n\lambda;$$

(*) Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1765 et 1770.

il vient

$$F = \frac{v^2}{\xi}\left[\frac{\xi^2}{v^2} - m\frac{\xi}{v} + n\lambda(1 - e^{ns})\right] = \xi - mv - nv^2,$$

ou

$$F = \lambda(e^{ns} - 1) - mv - nv^2.$$

4. Enfin, supposons *la résistance du milieu compliquée d'un troisième terme constant* k, en sorte que son expression devienne

$$R = k + mv + nv^2,$$

et qu'en même temps on modifie l'équation de la trajectoire en y *introduisant un terme dépendant de* k, savoir,

$$ax = e^{ns} - n\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)s - 1;$$

cette nouvelle courbe sera encore tautochrone.

En effet, on voit de suite, par l'expression de $\frac{dx}{ds}$,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{n}{a}\left(e^{ns} - 1 + \frac{k}{\lambda}\right),$$

que les termes où entre k disparaissent d'eux-mêmes de l'équation différentielle du mouvement, et l'on a, comme dans le cas précédent,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \lambda(e^{ns} - 1) + m\frac{ds}{dt} - n\frac{ds^2}{dt^2} = 0.$$

Ainsi, les mêmes calculs sont applicables, et les conséquences relatives au tautochronisme subsistent; seulement, il faut remarquer que la tangente au point A n'est plus horizontale; car

Pour $s = 0$, on a $\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{k}{g}.$

Cette valeur du cosinus de l'angle que fait la tangente en A avec la verticale exige que la constante k soit plus petite

que g. Cette condition est, en effet, toujours remplie dans la nature par la résistance des milieux, laquelle est une force beaucoup plus petite que la pesanteur.

La valeur du temps T nécessaire au mobile pour aller de B en A sera encore donnée par la formule

$$T = \int_0^\infty \frac{-du}{\lambda + mu + nu^2};$$

elle ne dépend pas de la constante k : ainsi le temps ne sera affecté que par les parties de la résistance du milieu qui sont proportionnelles à la première et à la seconde puissance de v. Ces particularités ont été signalées pour la première fois par Euler.

LIVRE TROISIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE FIGURE INVARIABLE.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT DE DEUX MASSES ATTACHÉES AUX EXTRÉMITÉS D'UNE VERGE INFLEXIBLE QUI PEUT GLISSER ET TOURNER DANS UN PLAN.

Deux points de masses m, m' sont attachés aux extrémités d'une droite sans masse AA′ (fig. 76) *qui peut glisser sur un plan horizontal à travers un anneau, mobile lui-même autour de son centre qui est fixé sur le plan. On propose de déterminer le mouvement du système.*

La verge étant en repos dans la position AA′, et les points m et m' étant à des distances données de l'anneau O, on met la verge en mouvement en imprimant à la masse m, située en A, une percussion horizontale perpendiculaire à AA′.

Soient $OA = r_0$, $OA' = r'_0$, $Om = r$, $Om' = r'$, l la longueur de la verge; on a

$$r_0 + r'_0 = r + r' = l.$$

Le problème sera résolu quand on connaîtra les valeurs du rayon vecteur r et de l'angle $mOA = \theta$ en fonction du temps.

Soient (x, y), (x', y') les coordonnées rectangulaires de m et m' rapportées aux axes OAx, Oy; v, v' les vitesses de ces deux points au bout du temps t.

Le principe des forces vives et celui des aires fournissent immédiatement deux intégrales premières des équations du

mouvement

$$mv^2 + m'v'^2 = \mathrm{A},$$
$$m(x\,dy - y\,dx) + m'(x'dy' - y'dx') = \mathrm{B}\,dt,$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Il convient d'y introduire les coordonnées polaires; on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}, \quad v'^2 = \frac{dr^2 + r'^2 d\theta^2}{dt^2}, \quad (dr' = -dr),$$
$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta, \quad x'dy' - y'dx' = r'^2 d\theta.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations précédentes, donnent

$$(1) \qquad (m + m')\frac{dr^2}{dt^2} + (mr^2 + m'r'^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \mathrm{A},$$

$$(2) \qquad (mr^2 + m'r'^2)\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{B}.$$

Déterminons les constantes A et B :

Si la vitesse initiale v_0 de la masse m est donnée immédiatement, on en conclut la vitesse de m', $v'_0 = \frac{v_0 r'_0}{r_0}$, et, par suite,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{v_0}{r_0},$$
$$\mathrm{A} = \frac{v_0^2}{r_0^2}(mr_0^2 + m'r_0'^2), \quad \mathrm{B} = \frac{v_0}{r_0}(mr_0^2 + m'r_0'^2).$$

La détermination des constantes n'est plus aussi simple si, au lieu de donner la vitesse initiale v_0, on fait connaître seulement la percussion P imprimée perpendiculairement à la tige.

Le principe de d'Alembert appliqué aux percussions fournit alors l'équation

$$-m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \delta x_0 + \left[\mathrm{P} - m\left(\frac{dy}{dt_0}\right)\right]\delta y_0 - m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)_0 \delta x'_0 - m'\left(\frac{dy'}{dt}\right)_0 \delta y'_0 = 0,$$

dans laquelle on doit remplacer dx, dy, dx', dy', δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ par leurs valeurs en r et θ tirées des relations

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -r'\cos\theta, \\ y' = -r'\sin\theta, \end{cases} \quad (r + r' = l);$$

puis on égalera à zéro les coefficients des variations indépendantes δr, $\delta\theta$. On trouvera ainsi

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{P r_0}{m r_0^2 + m' r_0'^2};$$

et, par suite,

$$A = \frac{P^2 r_0^2}{m r_0^2 + m' r_0'^2}, \quad B = P r_0.$$

Actuellement, si l'on élimine $\frac{d\theta}{dt}$ entre les équations (1) et (2) et qu'on remplace A et B par leurs valeurs, il vient

$$(3) \qquad \sqrt{m + m'}\,\frac{dr}{dt} = P r_0 \sqrt{\frac{1}{m r_0^2 + m' r_0'^2} - \frac{1}{m r^2 + m' r'^2}}.$$

Cette équation fait connaître le mouvement de glissement de la verge à travers l'anneau. On a ensuite, pour déterminer la rotation autour du centre O, l'équation (2) ou

$$(4) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{P r_0}{m r^2 + m' r'^2}.$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on élimine dt et l'on a l'équation différentielle de la trajectoire du point m. Comme la variable θ n'y entre que par sa différentielle, le problème est ramené aux quadratures. Il est à remarquer que l'équation de la trajectoire ne dépendra pas de la percussion, puisque le facteur P disparaît de lui-même.

On simplifiera les formules précédentes par la considération du centre de gravité du système. Soient R la distance de ce centre à l'origine au bout du temps t, R_0 sa distance initiale, M la somme des masses $m + m'$, MK^2 le moment d'inertie du système par rapport à un axe perpendiculaire à la verge et passant par le centre de gravité; on a

$$m r^2 + m' r'^2 = M(R^2 + K^2); \quad \text{d'ailleurs} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dt}.$$

Les équations (3) et (4) se transforment dans les suivantes :

$$(5) \qquad dt = \frac{M\sqrt{R_0^2 + K^2}}{P r_0} \sqrt{\frac{R^2 + K^2}{R^2 - R_0^2}}\, dR,$$

$$(6) \qquad d\theta = \sqrt{R_0^2 + K^2}\, \frac{dR}{\sqrt{(R^2 + K^2)(R^2 - R_0^2)}}.$$

Cette dernière est l'équation différentielle de la trajectoire décrite par le centre de gravité.

Pour que $\frac{dR}{d\theta}$ soit réel, il faut que R surpasse R_0; ainsi, à partir de l'instant où le mouvement commence, R va en croissant, et la verge glisse dans l'anneau du côté où se trouve déjà le centre de gravité. Celui-ci s'éloigne de plus en plus de l'origine, car $\frac{dR}{dt}$ ne saurait s'annuler pour une valeur de R supérieure à R_0; en même temps, la vitesse de rotation décroît de plus en plus, car $\frac{d\theta}{dt}$ diminue quand R augmente.

Les différentielles (5) et (6) ne sont pas intégrables; on les transforme aisément en fonctions elliptiques de première et de troisième espèce, en posant

$$R = \frac{R_0}{\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{K^2}{R_0^2 + K^2} = c^2;$$

il vient

$$d\theta = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}},$$

$$dt = \frac{M}{P r_0}\left[\frac{K^2\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} + \frac{R_0^2\, d\varphi}{(1 - \sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}\right].$$

On pourra ainsi calculer les valeurs numériques de θ et de t correspondantes à des valeurs données de R, au moyen des Tables de Legendre.

Si, à l'origine du mouvement, le centre de gravité du système coïncidait avec le point fixe O, on aurait $R_0 = 0$,

et l'équation (6) deviendrait

$$d\theta = \frac{K\,dR}{R\sqrt{R^2+K^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{K}{R} + \sqrt{1+\frac{K^2}{R^2}} = ce^{-\theta},$$

c désignant la constante arbitraire.

Mais pour $\theta = 0$, on doit avoir $R = 0$; donc $c = \infty$, et, par suite, on aura constamment

$$R = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, le centre de gravité du système demeure immobile; la tige ne glisse pas dans l'anneau, et chacune des masses m, m' décrit un cercle. Ce mouvement circulaire est d'ailleurs uniforme, car $\frac{d\theta}{dt}$ a une valeur constante $\frac{Pr_0}{MK^2}$.

On pouvait prévoir ces derniers résultats : en effet, la valeur initiale de $\frac{dr}{dt}$ étant nulle, il est évident que, dans le premier instant dt, la tige va tourner sans glisser autour du centre O; les deux points m, m' commencent donc à décrire deux arcs de cercle; mais les forces centrifuges qui résultent de ces mouvements ($mr\omega^2$, $m'r'\omega^2$) sont égales, puisque, le centre de gravité étant à l'origine, on a $mr = m'r'$; et comme ces forces agissent en sens contraire dans la direction de la tige, elles se détruisent. Donc, pendant l'instant suivant dt, le mouvement continuera sur les mêmes cercles et avec la même vitesse angulaire.

Il n'en est plus ainsi quand le centre de gravité est à droite ou à gauche de l'origine; la tige glisse en même temps qu'elle tourne, du côté où mr est le plus grand, c'est-à-dire du côté de l'anneau où se trouve déjà le centre de gravité.

CHAPITRE II.

SUR LE CHOC DE DEUX CORPS SPHÉRIQUES.

1. *Une sphère* S, *parfaitement élastique et homogène, est posée sur un plan horizontal, à une distance donnée* AB *d'un plan vertical inébranlable* MN *également doué d'une élasticité parfaite* (fig. 77). *Cette sphère, en repos, est choquée par une autre sphère* S', *dont le centre est animé d'une vitesse* V *dans le sens* AB, *et, après s'être réfléchie contre le plan* MN, *elle vient de nouveau rencontrer la sphère* S' *en un point déterminé* O *de la droite* AB. *On propose d'assigner la relation qui existe entre les rayons des deux sphères et les distances* AB, OB.

Soient R le rayon de la sphère S, R' celui de S'; $AB = a$, $OB = b$. Les masses des deux sphères peuvent être représentées par les cubes de leurs rayons; et il résulte de la théorie du choc des corps sphériques élastiques, que les vitesses des deux sphères S', S, après la première rencontre, seront respectivement

$$\frac{R'^3 - R^3}{R^3 + R'^3}V, \qquad \frac{2R'^3}{R^3 + R'^3}V.$$

Pour qu'elles soient de même sens, le rayon R' devra surpasser R.

Ensuite la sphère S va parcourir l'espace AB + OB — DA ou $a + b - 2R$, pendant que S' parcourra l'espace DO ou $a - b + 2R$; on aura donc la proportion

$$\frac{R'^3 - R^3}{R^3 + R'^3}V : \frac{2R'^3}{R^3 + R'^3}V :: a - b + 2R : a + b - 2R,$$

d'où

$$(R'^3 - R^3)(a + b - 2R) = 2R'^3(a - b + 2R).$$

Cette relation est indépendante de la vitesse V. Pour la simplifier, posons

$$b - 2R = a';$$

a' désigne la distance A'B analogue à AB, et l'on a

(1) $$(R'^3 + R^3)\,a = (3R'^3 - R^3)\,a'.$$

Trois des quatre quantités a, a', R, R', étant données, on pourra déterminer la quatrième.

Soient donnés a, R, R'; on tire

$$a' = \frac{R'^3 + R^3}{3R'^3 - R^3}\,a.$$

A mesure que R' augmente, a' diminue, et pour $R' = \infty$, on aurait $a' = \frac{a}{3}$. Ainsi, après la seconde rencontre, le point A de la sphère choquée (diamétralement opposé à celui où le choc a lieu) est toujours distant du plan de réflexion MN, d'une quantité plus grande que le tiers de sa distance primitive à ce plan, et il se rapproche indéfiniment de cette limite, si l'on suppose que le rayon de la sphère choquante aille en croissant jusqu'à l'infini.

On trouve pour les vitesses respectives des sphères S', S, après le second choc,

$$\frac{(R'^3 - R^3)^2 - 2R^3R'^3}{(R^3 + R'^3)^2}\,V, \qquad \frac{4R'^3(R'^3 - R^3)}{(R^3 + R'^3)^2}\,V:$$

pour que la première soit positive, c'est-à-dire pour que la sphère choquante continue à se mouvoir dans le sens AB, il faut que l'on ait

$$R' > R\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}},$$

et, dans ce cas, on calculera aisément, comme ci-dessus, la position du point où aura lieu le troisième choc, et ainsi de suite.

2. *Deux sphères élastiques et homogènes* S, S' (fig. 78)

ont leurs centres sur une même verticale; on les laisse tomber en même temps, sans leur imprimer de vitesses, en sorte que la sphère inférieure S', *atteignant la première un plan horizontal fixe* MN *également doué d'une élasticité parfaite, est réfléchie vers la sphère supérieure et la choque en un certain point* O; *puis, les deux sphères continuant à se mouvoir, une seconde réflexion de* S' *a lieu sur le plan, suivie d'un second choc des deux sphères en un point* O', *etc.*

On propose d'assigner les relations qui existent entre les rayons des sphères, leurs distances initiales au plan MN, *et les distances des points où elles se choquent à ce plan; les vitesses des deux corps après le choc, etc.*

Pour simplifier les formules, nous rapporterons les distances, non au plan MN, mais à un plan parallèle M'N', distant du premier d'une quantité DC égale au diamètre de la sphère S'. Soient donc $OD = x$, $AD = a$, $A'D = a'$.

La sphère S descend de A en O dans le temps $\sqrt{\frac{2}{g}(a-x)}$.

La sphère S' parcourt d'abord l'espace A'D dans le temps $\sqrt{\frac{2}{g}a'}$; puis elle remonte de D en O dans un temps égal à la différence entre les temps qu'elle mettrait à tomber de A' en D et de A' en O, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{2}{g}a'} - \sqrt{\frac{2}{g}(a'-x)}$.

Le temps total nécessaire à la sphère S' pour accomplir son mouvement est donc

$$2\sqrt{\frac{2}{g}a'} - \sqrt{\frac{2}{g}(a'-x)}.$$

Par suite, on aura l'équation

$$\sqrt{a-x} = 2\sqrt{a'} - \sqrt{a'-x};$$

d'où

$$x = \frac{(a-a')(9a'-a)}{16a'},$$

valeur facile à construire par quatrième proportionnelle. On peut encore écrire

$$x=\frac{b\,(8\,a'-b)}{16\,a'},$$

en désignant par b la distance initiale AA' des deux sphères. Deux des trois quantités a (ou b), a' et x étant données, on saura trouver la troisième. Par exemple, si l'on demandait la longueur d'un fil AA' à l'aide duquel la sphère S' serait suspendue au-dessous de S, de sorte que ce fil étant rompu, le choc des deux sphères après réflexion eût lieu en un point donné O, on tirerait de l'équation précédente, ou mieux de l'équation (2), après une élévation au carré,

$$\text{AA}' \text{ ou } a-a'=4\left[a'-\sqrt{a'(a'-x)}\right]=4(\text{A}'\text{D}-\text{A}'\text{H})=4.\text{DK}.$$

Le calcul des vitesses des deux sphères, avant et après le choc, n'offre aucune difficulté; nous ne nous y arrêterons pas.

3. *Une sphère élastique* S (fig. 79) *est tombée d'une certaine hauteur sur un plan horizontal élastique et inébranlable* MN, *et, au moment où elle se réfléchit verticalement de* A *vers* z, *une autre sphère* S' *commence à tomber dans la même verticale, à partir d'un point donné* B, *et les deux sphères se choquent en un point* O, *dans des conditions telles, qu'après le choc elles reprennent des vitesses respectivement égales, mais de sens contraire à celles qu'elles avaient avant le choc, et que la sphère* S' *remonte à son point de départ* B *dans un temps précisément égal à celui que la sphère* S *emploie à atteindre de nouveau le plan. Les deux sphères parvenues en* A *et* B *se retrouvent ainsi dans les mêmes circonstances qu'au commencement, et par suite elles reviennent de nouveau se choquer en* O, *et ainsi de suite indéfiniment. On propose d'assigner les relations qui existent, par suite des conditions du problème, entre les rayons des deux sphères, la hauteur initiale de*

chute de la sphère S, la hauteur de chute de la sphère S' et la hauteur du point de rencontre.

Soient R, R' les rayons des sphères S, S'; prenons $AC = 2R'$, et rapportons les distances au plan M'CN' parallèle à MN; soient $BC = a$, $OC = b$.

La sphère S', parvenue en O, aura, avant le choc, une vitesse

$$V = \sqrt{2g(a-b)};$$

la sphère S, ayant remonté de C en O, aura, avant le choc, une vitesse négative

$$V' = -\sqrt{2g(y-b)},$$

y désignant la hauteur initiale de chute de cette sphère, c'est-à-dire la hauteur à laquelle elle s'élèverait jusqu'à ce que sa vitesse fût réduite à zéro, si la sphère S' ne s'y opposait pas.

Après le choc, les deux sphères doivent, pour satisfaire à l'énoncé, posséder des vitesses respectivement égales à celles qu'elles avaient auparavant, mais dirigées en sens contraire. Or, la théorie du choc de deux corps élastiques dont les masses sont m, m', et les vitesses V, V', donne, pour les vitesses après le choc,

$$\frac{2(mV + m'V')}{m+m'} - V, \quad \frac{2(mV + m'V')}{m+m'} - V';$$

pour que ces vitesses se réduisent respectivement à $-V$, $-V'$, il faut que les quantités de mouvement mV, $m'V'$ soient égales et contraires. Par conséquent, on aura, en observant que les masses sont entre elles comme les cubes des rayons,

$$R^3\sqrt{y-b} = R'^3\sqrt{a-b}.$$

De plus, le temps que met la sphère S' pour descendre de B en O étant $\sqrt{\frac{2}{g}(a-b)}$, et le temps qu'emploie S pour re-

monter de C en O étant $\sqrt{\frac{2}{g}y} - \sqrt{\frac{2}{g}(y-b)}$, on aura

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{y} - \sqrt{y-b}.$$

Ces deux équations feront connaître y et b, en fonction de a, R, R′. Soit $\left(\frac{R'}{R}\right)^3 = n$; la première donne

$$y - b = n^2(a-b),$$

et, substituant dans la seconde, on a

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{b + n^2(a-b)} - n\sqrt{a-b},$$

d'où

$$(1+n)^2(a-b) = b + n^2(a-b),$$

et

$$b = \frac{a(1+2n)}{2(1+n)},$$

enfin

$$y = \frac{a(1+n)}{2}.$$

Il ne faut pas oublier que tous ces résultats supposent une élasticité *parfaite*, qui n'a pas lieu rigoureusement dans la nature.

CHAPITRE III.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE TIGE PESANTE.

1. *Déterminer le mouvement d'une tige pesante, homogène et d'une épaisseur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes, l'une verticale, l'autre horizontale.* (On n'a pas égard au frottement.)

Le système étant *à liaisons complètes*, il suffira de recourir au principe des forces vives, qui fournira une équation différentielle du premier ordre, propre à déterminer l'unique inconnue du problème, savoir, l'angle variable que fait la tige avec la verticale. Soient AB (*fig.* 80) la direction de la tige au bout du temps t, θ l'angle qu'elle fait avec la verticale Oy, M sa masse, l sa longueur, v la vitesse de l'un de ses points dont la masse est m, et dont les coordonnées rapportées aux deux droites fixes sont désignées par x et y, r la distance Am, y_1 l'ordonnée du centre de gravité G; on a

$$\Sigma mv^2 = c - 2\Sigma mgy = c - 2g\mathrm{M}y_1,$$

ou, comme $y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta$,

$$\Sigma mv^2 = c - g\mathrm{M}l\cos\theta;$$

c est une constante arbitraire. On a d'ailleurs

$$x = r\sin\theta,\quad y = (l - r)\cos\theta,$$

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{[r^2 + (l^2 - 2lr)\sin^2\theta]\,d\theta^2}{dt^2};$$

donc

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}\Sigma m[r^2 + (l^2 - 2lr)\sin^2\theta] = c - g\mathrm{M}l\cos\theta.$$

Si l'on suppose la barre homogène et d'épaisseur constante, cette équation se simplifie notablement, parce que le terme en $\sin^2\theta$ disparaît du premier membre. La masse m de chaque élément peut alors être représentée par sa longueur dr, et la masse M par l; on a

$$\sum mr^2 = \int_0^l r^2 dr = \frac{l^3}{3},$$

$$\sin^2\theta \sum m(l^2 - 2lr) = \sin^2\theta \int_0^l (l^2 - 2lr)\,dr = \sin^2\theta\,(l^3 - l^3) = 0.$$

L'équation du mouvement se réduit donc à

$$\frac{l}{3}\frac{d\theta^2}{dt^2} = c - g\cos\theta.$$

Pour déterminer la constante c, supposons qu'à l'origine du mouvement, la tige inclinée d'un angle α ait reçu une percussion à laquelle corresponde une valeur ε de $\frac{d\theta}{dt}$; on aura

$$c = \frac{l}{3}\varepsilon^2 + g\cos\alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \varepsilon^2 + \frac{3g}{l}(\cos\alpha - \cos\theta).$$

Cette équation coïncide avec celle qui déterminerait les oscillations d'un pendule simple de longueur $\frac{2}{3}l$, primitivement écarté de la verticale d'un angle α et animé d'une vitesse angulaire ε, en supposant de plus que la pesanteur agît de bas en haut, dans le sens Oy.

Ainsi donc, si l'on suspendait au point O un semblable pendule Om', les positions successives qu'il prendrait dans le plan $y'Ox$, seraient à chaque instant parallèles à celles que prend la tige dans son mouvement.

Nous avons considéré comme connue la valeur initiale ε de $\frac{d\theta}{dt}$: si l'on ne donne que l'intensité P de la percussion appliquée en un point déterminé I de la barre (*fig.* 81), on devra calculer ε de la manière suivante :

Le principe de d'Alembert, appliqué aux forces instantanées, fournit l'équation

$$X_0\,\delta x_0 + Y_0\,\delta y_0 - \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y\right) = 0,$$

X_0, Y_0 désignant les composantes de la percussion, et x_0, y_0 les coordonnées de son point d'application. Le terme soumis au signe $\sum$ se rapporte à un point quelconque de la barre, à l'origine du temps. Soit $AI = c$; les liaisons du système s'expriment par les équations

$$x_0 = c\sin\alpha,\quad y_0 = (l - c)\cos\alpha,$$

$$x = r\sin\alpha,\quad y = (l - r)\cos\alpha,$$

d'où l'on tire les valeurs de δx_0, δy_0, δx, δy, en fonction de la variation $\delta\alpha$ qui reste indépendante,

$$\delta x_0 = c\cos\alpha.\delta\alpha,\quad \delta y_0 = -(l - c)\sin\alpha.\delta\alpha,$$

$$\delta x = r\cos\alpha.\delta\alpha,\quad \delta y = -(l - r)\sin\alpha.\delta\alpha;$$

on a aussi, pour $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = r\cos\alpha.\varepsilon,\quad \frac{dy}{dt} = -(l - r)\sin\alpha.\varepsilon,$$

ε désignant la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$.

Ces valeurs étant substituées dans l'équation ci-dessus, on devra égaler à zéro le coefficient de $\delta\alpha$, et l'on aura, toutes réductions faites,

$$X_0\,c\cos\alpha - Y_0(l - c)\sin\alpha = \frac{l^2}{3}\varepsilon,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{3[X_0 c \cos \alpha - Y_0 (l-c) \sin \alpha]}{l^3}.$$

Le signe et la grandeur de ε dépendent de la grandeur et de la direction de la percussion, et aussi de la position du point I.

Pour qu'il n'y eût pas de vitesse initiale produite, il faudrait que l'on eût

$$X_0 c \cos \alpha = Y_0 (l-c) \sin \alpha,$$

d'où

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{(l-c) \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{IC}{ID}.$$

Ainsi la direction de la percussion devrait passer par le sommet S du rectangle AOBS. Cette condition est nécessaire et suffisante.

2. *Déterminer le mouvement d'une tige pesante, libre de tourner dans l'espace autour d'un de ses points supposé fixe.* (Concours d'agrégation de 1843.)

On prendra pour origine des coordonnées le point fixe O (*fig.* 82), et l'axe des z vertical dans le sens de la pesanteur. Les variables qui déterminent la position du système à chaque instant sont au nombre de deux, savoir : l'angle $AOz = \theta$ que fait la baguette AB avec l'axe des z, et l'angle $A'Ox = \psi$, que sa projection horizontale fait avec l'axe des x. Soient M la masse de la baguette que nous ne supposons pas homogène; a la distance de son centre de gravité G au point O; r le rayon vecteur Om d'un point quelconque dont la masse est m; r' la projection OP de r.

Les principes de la dynamique fournissent divers moyens d'obtenir entre θ et ψ les deux équations nécessaires à la solution du problème.

1°. Prenons les équations de la dynamique sous la forme que leur a donnée Lagrange (*voyez* page 7).

Nous devrons d'abord calculer les deux fonctions T et V.

V désigne la fonction des forces qui se réduit ici à $\Sigma\int mg\,dz$; on a donc

$$V = g\Sigma mz = Mag\cos\theta.$$

Pour la fonction T, on trouve successivement (*voyez* page 8)

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dr'^2 + r'^2 d\psi^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\sum mr^2(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2),$$

$$T = \tfrac{1}{2}(\theta'^2 + \sin^2\theta\,.\,\psi'^2)\,M(a^2 + K^2);$$

MK^2 désigne le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à sa direction et passant par le centre de gravité; θ' et ψ' sont les dérivées $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$.

Cela posé, l'*équation des forces vives*

$$T - V = \text{const.}$$

donne

$$(1)\qquad \theta'^2 + \sin^2\theta\,.\,\psi'^2 - \frac{2g}{a + \frac{K^2}{a}}\cos\theta = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Il suffit donc d'associer à cette équation l'une des équations (6) de la page 7. Comme T et V ne contiennent pas la variable ψ, on choisira de préférence la suivante,

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\psi} - \frac{dV}{d\psi} = 0,$$

qui se réduit à

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} = 0;$$

d'où

$$\frac{dT}{d\psi'} = \text{const.},$$

ou bien, vu l'expression de T,

$$\sin^2\theta \,.\, \psi' = c', \tag{2}$$

c' étant une deuxième constante arbitraire.

Les équations (1) et (2) résolvent la question.

Si la tige pesante se réduisait à un point matériel distant du point O de la longueur l, les équations de son mouvement se déduiraient des deux précédentes, en y faisant

$$K = 0 \quad \text{et} \quad a = l;$$

l'équation (1) deviendrait

$$\theta'^2 + \sin^2\theta \,.\, \psi'^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta = c. \tag{3}$$

Quant à l'équation (2), elle ne serait pas modifiée; or l'équation (3) coïncide avec (1) quand on y pose

$$l = a + \frac{K^2}{a}.$$

Il suit de là que *la tige pesante se meut autour du point* O *comme le ferait un pendule simple, dont la longueur serait* $\left(a + \frac{K^2}{a}\right)$, *les circonstances initiales étant supposées les mêmes.*

Le problème est ainsi réduit aux formules du pendule conique.

Avant d'aller plus loin, il ne sera pas inutile de nous arrêter un instant sur les autres procédés qu'on aurait pu suivre pour parvenir aux équations (1) et (2).

2° A l'équation des forces vives, mise sous la forme (1), nous aurions pu associer l'*équation du principe de la conservation des aires*, qui a lieu pour le plan horizontal seulement,

$$\sum m \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.},$$

ou

$$\sum mr'^2 \frac{d\psi}{dt} = \text{const.}$$

Et comme $r' = r \sin\theta$, cette intégrale première ne diffère pas de l'équation (2). Elle exprime que l'aire décrite autour du point O pendant chaque instant dt par la projection horizontale d'une partie quelconque Om de la tige, est constante.

3°. Le mouvement de la tige serait complétement déterminé, si l'on connaissait celui de *l'un* de ses points. Soit l la distance à l'origine de ce point auquel nous conviendrons de rapporter tous les autres, et dont nous fixerons plus loin la position sur la tige mobile; désignons par ξ, η, ζ ses coordonnées: les coordonnées x, y, z d'un point quelconque sont liées à ξ, η, ζ par les équations

$$x = \xi \frac{r}{l}, \quad y = \eta \frac{r}{l}, \quad z = \zeta \frac{r}{l}.$$

De plus, on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2.$$

Si l'on substitue les valeurs de x, y, z dans l'équation que fournit le principe de d'Alembert,

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) - \sum mg\,\delta z = 0,$$

il vient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{gla}{a^2+K^2}\right)\delta\zeta = 0;$$

à cette équation, il faut associer

$$\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = 0.$$

On en tire, par la méthode ordinaire, des multiplica-

teurs,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda\xi = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda\eta = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \lambda\xi - \frac{gla}{a^2 + K^2} = 0.$$

La longueur l est arbitraire : si l'on pose

$$l = a + \frac{K^2}{a},$$

les trois équations précédentes coïncident avec les équations bien connues du pendule conique.

Ainsi ce procédé, très-différent des deux premiers, nous ramène à la même conclusion, à savoir que la tige se meut comme un pendule simple de longueur $a + \frac{K^2}{a}$.

Poursuivons maintenant la recherche des principaux résultats renfermés dans les équations (1) et (2).

On tire de ces équations les valeurs de dt et $d\psi$ en fonction de θ,

$$dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(c + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - c'^2}},$$

$$d\psi = \frac{c'\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\left(c + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - c'^2}}.$$

Ces formules sont réductibles aux fonctions elliptiques, et ne peuvent conséquemment s'intégrer que par approximation. Quand la tige sera homogène, on aura aisément la longueur du pendule simple correspondant. Si l'on supposait, par exemple, que le point fixe O fût l'une des extrémités de la tige, on trouverait, en désignant par L sa

longueur,

$$l = a + \frac{K^2}{a} = \frac{\int r^2 dr}{aL} = \frac{2}{3}L.$$

Ainsi, dans ce cas, la longueur du pendule simple serait $\frac{2}{3}$ de celle de la tige.

Les constantes c et c' se détermineront d'après les données initiales. Soient α l'angle AOz que la tige AB, dans sa position initiale, fait avec la verticale (*fig.* 83) ; CD la direction de la percussion qui lui a été imprimée, et qu'on peut supposer perpendiculaire à la tige. Celle-ci commencera évidemment à tourner dans le plan OCD ; car il n'y a pas de raison pour que le mouvement commence d'un côté de ce plan plutôt que d'un autre, et, d'ailleurs, on peut considérer ce plan comme celui de deux axes principaux relatifs au point O. On appliquera donc la formule de la vitesse angulaire de rotation, comme s'il y avait un axe fixe perpendiculaire en O au plan OCD. Soient ω cette vitesse angulaire, μv l'intensité de la percussion, f la distance OC ; on aura

$$\omega = \frac{\mu v f}{M(a^2 + K^2)} :$$

or la vitesse initiale v d'un point quelconque M de la tige est $r\omega$. Si donc on remplace, dans le premier membre de l'équation (1), la quantité $\theta'^2 + \sin^2\theta.\psi'^2$ ou $\frac{v^2}{r^2}$, par la valeur ci-dessus de ω^2, on aura l'équation

$$(3) \qquad \omega^2 = c + \frac{2g}{l}\cos\alpha, \qquad \left(l = a + \frac{K^2}{a}\right),$$

qui déterminera la constante c.

Quant à la constante c', on a, d'après l'équation (2),

$$c' = \sin^2\alpha \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 ;$$

or $\sin\alpha\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ représente la vitesse initiale de la projection horizontale du point de la tige dont la distance au point fixe est l'unité : on a donc, en désignant par ε l'angle de la direction CD avec une perpendiculaire au plan zOA,

$$\sin\alpha\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = \omega\cos\varepsilon;$$

il en résulte

$$(4)\qquad c' = \omega\cos\varepsilon.\sin\alpha.$$

Nous ne nous arrêterons pas au cas où la tige s'écarte très-peu de la verticale. On néglige alors les quantités très-petites du troisième ordre en θ et α, et les valeurs de θ et ψ s'obtiennent en fonction du temps, sous forme finie, par les formules du pendule conique.

Quelles conditions doit remplir la percussion initiale pour que la tige décrive un cône droit autour de la verticale?

On a constamment, dans ce cas,

$$\theta = \alpha,\quad \text{et, par suite,}\quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

D'après la valeur précédente de $\frac{d\theta}{dt}$, on en conclut

$$\sin^2\alpha\left(c + \frac{2g}{l}\cos\alpha\right) - c'^2 = 0;$$

mais cette équation exprime seulement que $\frac{d\theta}{dt}$ est nul pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire à l'origine du mouvement : il faut y joindre la condition $d\frac{d\theta}{dt} = 0$; ce qui donne

$$\frac{g}{l\cos\alpha} = \frac{c'^2}{\sin^4\alpha}.$$

Il reste à substituer, dans ces deux équations, les valeurs des constantes c et c' tirées des équations (3) et (4); la

première se réduit alors à

$$\cos \varepsilon = 1, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\omega^2 = \frac{g \sin^2 \alpha}{l \cos \alpha}:$$

$\varepsilon = 0$ signifie que la percussion doit être dirigée perpendiculairement au plan vertical qui contient la tige. L'équation

$$\omega^2 = \frac{g \sin^2 \alpha}{l \cos \alpha}$$

permettra d'assigner la grandeur de la percussion correspondante à un angle α donné; et réciproquement, si la percussion est donnée, on en conclura l'angle α, en résolvant l'équation

$$\cos^2 \alpha + \frac{\omega^2 l}{g} \cos \alpha - 1 = 0,$$

qui admet toujours pour $\cos \alpha$ *une* valeur réelle plus petite que 1. Enfin, l'équation (2) montre que le cône droit sera décrit d'un mouvement uniforme : la vitesse de ce mouvement est

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sin \alpha}.$$

Désignons cette vitesse par k, et remplaçons ω par la valeur précédente; nous aurons

$$k = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}.$$

On voit que, dès que l'angle α sera donné, cette vitesse k sera déterminée indépendamment de la percussion; quelle que soit cette vitesse, il y aura une valeur minima $\sqrt{\frac{g}{l}}$, au-dessous de laquelle k ne saurait tomber : mais cette limite ne sera jamais atteinte, car il faudrait que α fût zéro; la tige

serait alors verticale, et comme ω serait nulle aussi, il n'y aurait pas de percussion; la tige resterait donc en repos.

Pour compléter la solution du problème, il nous reste à calculer la pression variable P que supporte le point fixe. Cette recherche conduit à des résultats dignes de remarque. La méthode consiste, comme on sait, à imaginer qu'on applique en O une force égale et contraire à la pression; on peut alors regarder la tige comme devenue libre, et appliquer les six équations d'équilibre d'un corps solide. Soient X, Y, Z les composantes de la pression P; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité de la tige; les forces perdues s'expriment aisément en fonction de x_1, y_1, z_1, et les sommes de leurs composantes parallèlement à chaque axe sont

$$-M\frac{d^2x_1}{dt^2},\quad -M\frac{d^2y_1}{dt^2},\quad -M\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-g\right).$$

D'après cela, les trois premières équations d'équilibre, qui renferment seules les composantes X, Y, Z de la pression, sont

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &X+M\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,\\ &Y+M\frac{d^2y_1}{dt^2}=0,\\ &Z+M\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-g\right)=0.\end{aligned}\right.$$

On a, d'ailleurs,

$$x_1=a\sin\theta\cos\psi,\quad y_1=a\sin\theta\sin\psi,\quad z_1=a\cos\theta.$$

Ces équations feront connaître les trois composantes de la pression en fonction des variables θ et ψ, qui, elles-mêmes, sont des fonctions connues de t, par les formules précédentes; mais le calcul direct des valeurs de X, Y, Z serait fort compliqué. On le simplifie notablement, en ayant recours aux trois équations des moments : ces équations, dans

lesquelles nous introduisons les coordonnées x_1, y_1, z_1, sont

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \\ y_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \dfrac{gay_1}{l}, \\ z_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\dfrac{gax_1}{l}. \end{cases}$$

Elles se réduisent à deux distinctes, comme il est aisé de le voir.

Des équations (5) et (6) combinées, on déduit, sans difficulté,

$$Y x_1 - X y_1 = 0 \quad \text{et} \quad Z y_1 - Y z_1 = M g y_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right).$$

Ces équations mettent en évidence deux propriétés de la pression : 1° les composantes X, Y étant proportionnelles à x_1, y_1, il s'ensuit que *la pression est toujours comprise dans le plan vertical qui contient la tige;* 2° les composantes Z, Y n'étant pas proportionnelles aux coordonnées z_1, y_1 $\left(\text{puisque } l \text{ ou } a + \frac{K^2}{a} \text{ diffère essentiellement de } a\right)$, il s'ensuit que *la pression n'est pas dirigée suivant la tige.*

Les deux équations précédentes permettent, en outre, d'exprimer X et Y en fonction de Z sans coefficients différentiels :

$$Y = \left[Z - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{y_1}{z_1}, \quad X = \left[Z - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{x_1}{z_1};$$

on en conclut

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = Z^2 + \left[Z - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Tout se réduit donc à déterminer Z en fonction de θ. La troisième des équations (5) donne, à cet effet,

$$Z = M\left(g + a\cos\theta \, . \frac{d\theta^2}{dt^2} + a\sin\theta \, . \frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

On connaît déjà $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ; on en tirera $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et substituant, il viendra

$$Z = M\left[g\left(1-\frac{a}{l}\right) + ac\cos\theta + \frac{3ag}{l}\cos^2\theta\right];$$

par suite,

$$P^2 = M^2\left[\begin{array}{l} g^2\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 + a^2c^2 + 2agc\left(1+\frac{2a}{l}\right)\cos\theta \\ \qquad + \frac{3ag^2}{l}\left(2+\frac{a}{l}\right)\cos^2\theta \end{array}\right].$$

L'inclinaison γ de la pression sur la verticale sera également connue en fonction de θ, puisque

$$\cos\gamma = \frac{Z}{P}.$$

La grandeur et la direction de la pression ne dépendent explicitement que de la variable θ, et non de ψ. Quand l'angle θ sera constant, c'est-à-dire dans le cas où la tige décrira un cône droit, la pression sera constante, et sa direction décrira également un cône droit autour de la verticale. La valeur générale de P se réduit, dans ce cas, à

$$P = Mg\sqrt{1+\frac{a^2}{l^2}\operatorname{tang}^2\alpha};$$

on a, d'ailleurs,

$$Z = Mg,$$

d'où

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{l^2}\operatorname{tang}^2\alpha}},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{a}{l}\operatorname{tang}\alpha.$$

Comme $\frac{a}{l}$ est < 1, l'angle au centre du cône droit que décrit la pression est plus petit que celui du cône que décrit la tige.

Ces dernières formules, relatives au cas du cône droit, s'obtiendraient directement et d'une manière beaucoup plus

simple, en remarquant que les *forces effectives* sont alors immédiatement connues de grandeur et de direction, puisque chaque point m décrit un cercle dont le rayon ρ est $r \sin \alpha$, avec une vitesse

$$v = r\omega = r \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}.$$

La force effective $\frac{mv^2}{\rho}$ a donc pour valeur $\frac{mrg}{l} \operatorname{tang} \alpha$, et comme sa direction ne varie pas d'un point à un autre, la résultante des forces effectives est égale à leur somme

$$\sum \frac{mv^2}{\rho} = \mathrm{M} a \frac{g}{l} \operatorname{tang} \alpha.$$

Cette résultante, prise en sens contraire et composée avec la pesanteur $\mathrm{M}g$, donne, pour la pression P, la valeur déjà trouvée.

Les équations différentielles en ξ, η, ζ de la page 335, permettent de comparer la pression P exercée par la tige mobile sur le point fixe, avec la pression que supporterait ce même point, si l'on remplaçait la tige par un pendule simple de longueur $l = a + \frac{\mathrm{K}^2}{a}$. Cette dernière pression, qui n'est autre que la tension du fil auquel serait suspendu un point matériel de masse M, a pour expression $\mathrm{M}\lambda l$; et si l'on ajoute membre à membre les trois équations que nous venons de rappeler, multipliées respectivement par ξ, η, ζ, on trouve

$$\lambda = \frac{v^2}{l^2} + \frac{g\zeta}{l^2}:$$

or, $$\frac{v^2}{l^2} = \frac{2g}{l} \cos \theta + c \quad \text{et} \quad \zeta = l \cos \theta;$$

donc $$\lambda = \frac{3g}{l} \cos \theta + c.$$

On connaîtra ainsi, pour chaque position du pendule, la valeur de la tension $\mathrm{M}\lambda l$. Mais, bien que le mouvement du

pendule simple coïncide avec celui de la tige, les deux pressions P et $M\lambda l$ sont distinctes en grandeur et en direction. La composante X de la pression P peut s'écrire $-\frac{Ma}{l}\frac{d^2\xi}{dt^2}$; ou bien, comme $\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\lambda\xi$,

$$X=\frac{Ma}{l}\lambda\xi;$$

on a de même
$$Y=\frac{Ma}{l}\lambda\eta,$$

$$Z=\frac{Ma}{l}\lambda\zeta+Mg\left(1-\frac{a}{l}\right).$$

On conclut de nouveau de ces trois formules que la pression P n'est pas dirigée suivant la tige, mais seulement dans le plan vertical qui contient celle-ci. De plus on voit que cette pression est la résultante de deux forces, l'une dirigée suivant la tige, et égale à $M\lambda l.\frac{a}{l}$, c'est-à-dire à la pression due au pendule conique multipliée par $\frac{a}{l}$, l'autre verticale et égale à $Mg\left(1-\frac{a}{l}\right)$, c'est-à-dire à la composante qu'on obtient en décomposant le poids Mg de la tige en deux forces parallèles appliquées au point fixe et au centre d'oscillation.

Dans toutes les formules qui précèdent, on n'a pas supposé que le centre de gravité G de la tige mobile coïncidât avec le point fixe. On aurait alors $a=0$, et par suite $l=\infty$; en sorte que le mouvement de la tige ne serait plus assimilable à celui d'un pendule simple de longueur l. Mais, dans ce cas, le poids de la tige étant constamment détruit par le point fixe, il n'y a pas de raison pour que la tige sorte du plan OCD qui passe par sa position initiale et par la direction de la percussion, et elle devra décrire ce plan avec la vitesse constante $\omega=\frac{\mu vf}{MK^2}$.

Au reste, ces résultats sont aussi mis en évidence par les équations (1) et (2) qui deviennent complétement intégrables.

L'équation (1) se réduit à

$$(1) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = c;$$

et comme le premier membre n'est autre que $\left(\frac{v}{r}\right)^2$, cette équation exprime que la vitesse d'un point quelconque de la tige demeure constante pendant toute la durée du mouvement; de plus, on a, par l'équation (3), $c = \omega^2$.

L'équation (2) n'est pas modifiée; on a toujours

$$(2) \qquad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = c', \quad \text{et} \quad c' = \omega \cos\varepsilon \sin\alpha.$$

Éliminant $\frac{d\psi}{dt}$ entre les équations (1) et (2), et posant

$$\sin\alpha \cos\varepsilon = m,$$

il vient

$$\omega\, dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - m^2}} = \frac{-d.\cos\theta}{\sqrt{1 - m^2 - \cos^2\theta}}.$$

L'intégrale est

$$\cos\theta = \sqrt{1 - m^2}\cos(\omega t - \beta);$$

et, pour déterminer la constante β, on a

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - m^2}\cos\beta:$$

par suite, l'intégrale précédente prend la forme

$$(7) \qquad \cos\theta = \cos\alpha \cos\omega t + \sin\alpha \sin\omega t \sin\varepsilon.$$

Or, si l'on conçoit l'angle trièdre dont les arêtes sont la verticale Oz, la direction initiale OC de la tige et une droite variable Om faisant avec OC, dans le plan OCD, l'angle ωt; l'expression de $\cos\theta$ est précisément celle du cosinus de la face angulaire zOm, opposée à l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$.

Donc la position de la tige coïncide à chaque instant avec celle de l'arête Om, ce qu'il fallait démontrer.

On tire ensuite de l'équation (2),

$$d\psi = \frac{\omega m . dt}{\sin^2 \theta} = \frac{\omega m . dt}{\sin^2(\omega t - \beta) + m^2 \cos^2(\omega t - \beta)},$$

et intégrant, on a

$$\text{(8)} \qquad \tang(\psi - \gamma) = \frac{\tang(\omega t - \beta)}{m}.$$

On peut convenir que l'angle ψ soit nul avec t, et la constante γ sera déterminée par l'équation

$$\tang \gamma = \frac{\tang \beta}{m} = \frac{\tang \varepsilon}{\cos \alpha}.$$

La question que nous venons de traiter est comprise, comme cas particulier, dans le problème du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Il a paru préférable de chercher directement les formules qui ramènent la question au pendule conique. Cependant il n'est pas inutile, au point de vue de la comparaison des méthodes de la dynamique, de montrer comment les équations qui conviennent au cas général d'un solide mobile autour d'un point fixe, se modifient, lorsque ce corps se réduit à un système de points pesants, en ligne droite.

Les équations générales du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, sont

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)\,qr + L_1, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)\,rp + M_1, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)\,pq + N_1, \end{aligned} \right.$$

où p, q, r désignent les trois composantes de la vitesse instantanée de rotation autour des axes principaux du mobile

relatifs au point O; A, B, C les trois moments d'inertie principaux, et L_1, M_1, N_1 les sommes des moments des forces appliquées aux différents points du mobile, par rapport aux axes principaux.

Ici, l'un de ces axes (Oz_1) sera la droite AB elle-même, et les deux autres (Ox_1, Oy_1) seront deux droites rectangulaires tracées à volonté dans un plan perpendiculaire à AB passant par le point O; par suite, on aura

$$C = o, \quad A = B = M(a^2 + K^2).$$

La position du mobile à chaque instant dépend, en général, de *trois* angles qui déterminent les positions des trois sections principales x_1Oy_1, y_1Oz_1, z_1Ox_1, par rapport aux plans fixes des coordonnées x, y, z.

Le premier de ces angles, ordinairement désigné par la lettre ψ, est celui que l'intersection du plan x_1Oy_1 avec le plan xOy fait avec l'axe des x, et comme cette intersection est évidemment perpendiculaire au plan zOz_1 ou zOA, ce premier angle n'est autre que le complément de l'angle $A'Ox$ déjà désigné par ψ.

Le second angle mesure l'inclinaison du plan mobile x_1Oy_1 sur le plan xOy; c'est l'angle zOA ou θ.

Le troisième angle, qu'on désigne par φ, est celui que l'axe Ox_1 fait avec l'intersection des deux plans x_1Oy_1, xOy. Il est évident qu'ici nous n'avons point à considérer cet angle; les deux premiers ψ et θ suffisent, comme nous l'avons dit plus haut, pour déterminer la position de la droite mobile. L'analyse devra donc laisser ce troisième angle φ indéterminé.

La pesanteur étant la seule force appliquée aux différents points de la tige, donne une résultante Mg appliquée au point G de l'axe Oz_1 parallèlement à Oz; et, par suite, les couples L_1, M_1, N_1 provenant de la translation de cette

force au point fixe O, sont

$$L_1 = -Mag\cos zOy_1 = Mag\sin\theta\cos\varphi,$$
$$M_1 = Mag\cos zOx_1 = -Mag\sin\theta\sin\varphi,$$
$$N_1 = 0.$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations (4), la troisième de ces équations devient une identité, en sorte que $\frac{dr}{dt}$ demeure arbitraire. Cette indétermination revient à celle de l'angle φ : on conçoit, en effet, que le mobile étant réduit à son axe de figure Oz_1, il n'y a pas lieu de déterminer la vitesse angulaire de rotation r autour de cet axe.

Les deux premières équations (9) deviennent

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} - qr = \dfrac{g}{l}\sin\theta\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} + pr = -\dfrac{g}{l}\sin\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

La théorie générale du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe fournit de plus entre p, q, r et les trois angles ψ, θ et φ, les trois équations suivantes (où $d\psi$ a été changé en $-d\psi$, parce que notre angle ψ est le complément de celui que l'on considère dans cette théorie) :

$$(11)\qquad \begin{cases} p = -\cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt} - \sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}, \\[2ex] q = \sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt} - \cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}, \\[2ex] r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

En éliminant, dans les équations (10), p, q, r, au moyen des formules (11), on aurait deux équations différentielles du second ordre entre ψ, θ et φ, *dans lesquelles les dérivées relatives à la troisième inconnue φ n'entreraient pas ;* on pourrait donc y regarder φ comme constante et les trai-

ter comme des équations différentielles à deux variables seulement, ψ et θ. Mais, sans faire cette élimination, on peut déduire des équations (10) deux équations immédiatement intégrables. En effet, si l'on ajoute ces équations multipliées respectivement par p et q, il vient

$$p\frac{dp}{dt}+q\frac{dq}{dt}=\frac{g}{l}\sin\theta\,(p\cos\varphi-q\sin\varphi),$$

ou, en ayant égard aux formules (6),

$$pdp+qdq=-\frac{g}{l}\sin\theta\,d\theta;$$

et intégrant,
$$p^2+q^2=c+\frac{2g}{l}\cos\theta.$$

Mais
$$p^2+q^2=\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}+\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

donc
$$\frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}-\frac{2g}{l}\cos\theta=c.$$

C'est l'équation (1).

Puis, si l'on ajoute les équations (10) multipliées respectivement par $\sin\theta\cos\varphi$ et $\sin\theta\sin\varphi$, les seconds membres disparaissent, et l'équation résultante prend la forme

$$d.\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=0,$$

d'où
$$\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=c'.$$

Enfin, lorsqu'on remplace p et q par leurs valeurs tirées des deux premières formules (6), l'angle φ disparaît, et il reste

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}=c'.$$

C'est l'équation (2). Nous retrouvons ainsi, mais par une voie moins simple, les deux équations qui renferment la solution complète du problème.

CHAPITRE IV.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CYLINDRE PESANT ET NON HOMOGÈNE QUI TOUCHE UN PLAN HORIZONTAL FIXE.

Un cylindre pesant, à base circulaire, dont le centre de gravité est hors de l'axe, est posé sur un plan horizontal qu'il touche suivant une génératrice. On l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale, et il s'agit de déterminer son mouvement oscillatoire. (Concours d'agrégation de 1848.)

Soient O la position initiale du centre de la section droite qui contient le centre de gravité du cylindre (*fig.* 84), A le point de contact avec le plan horizontal; prenons pour axes des coordonnées dans le plan de la section la verticale AOy et l'horizontale Ax: au bout du temps t, les points O et A sont venus en C et B, et le centre de gravité du cylindre est en G. Soit N la résistance du plan, laquelle est égale et contraire à la pression exercée sur lui par le cylindre; si l'on joint cette force à la pesanteur qui agit sur tous les points du mobile, on pourra le traiter comme un corps entièrement libre.

Or l'étude du mouvement d'un corps solide libre se ramène à celle de deux autres mouvements, savoir: le mouvement de translation de l'un de ses points (on choisit le centre de gravité) et le mouvement de rotation du corps autour de ce point.

Considérons d'abord le mouvement de translation du centre de gravité. Ce point se meut comme un point matériel où les masses de tous les points du cylindre seraient réunies, et où seraient également transportées parallèlement à elles-mêmes les forces de la pesanteur et la résistance N. Donc, si l'on désigne par M la masse du cylindre,

par x_1, y_1 les coordonnées du point G, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad M\frac{d^2 y_1}{dt^2} = N - Mg.$$

Ces équations, prises isolément, ne suffiraient pas pour déterminer le mouvement de translation, attendu qu'il y entre la force variable et inconnue N, qui dépend du mouvement de rotation. Cependant, comme la première est immédiatement intégrable, on en tire

$$\frac{dx_1}{dt} = \text{const.}$$

Or la constante est nulle, puisque le mobile n'a pas de vitesse initiale; donc

$$x_1 = \text{const.}$$

Ainsi le *centre de gravité ne sort pas de la verticale* LL', *qui passe par sa position initiale*. Quant à la loi de son mouvement sur cette verticale, elle ne saurait être établie indépendamment du mouvement de rotation qui va maintenant nous occuper.

Le corps tourne autour de son centre de gravité, comme si ce point était fixe, et sans qu'il soit rien changé aux forces motrices. De plus, il résulte de la nature du mobile, que la section droite BCG reste toujours comprise dans le même plan vertical; donc la rotation a lieu autour d'un axe parallèle à l'axe du cylindre, et, par suite, l'équation du mouvement de rotation sera de la forme

$$MK^2\frac{d\omega}{dt} = \Sigma Qq;$$

MK^2 désigne le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe de rotation, ω la vitesse angulaire, et ΣQq la somme des moments des forces par rapport à cet axe.

Soient l'angle $BCG = \theta$, $CG = a$, $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$.

(Nous écrivons le signe — devant $\frac{d\theta}{dt}$ parce que le centre de gravité va d'abord en s'abaissant, et qu'ainsi l'angle θ décroît quand t augmente.)

La somme des moments des poids des diverses molécules du cylindre par rapport à l'axe est nulle, puisque cet axe passe par le centre de gravité; il reste le moment de la force N, qui est N.CD, ou $Na\sin\theta$. L'équation précédente devient donc

$$(2)\qquad MK^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Na\sin\theta.$$

Comme on a $y_1 = CB - a\cos\theta$, il en résulte

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = a\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + a\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

et, par suite, la seconde des équations (1) se transforme ainsi :

$$(3)\qquad Ma\left(\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = N - Mg.$$

Éliminant N entre les équations (2) et (3), il vient

$$K^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + ag\sin\theta + a^2\left(\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0.$$

Cette équation différentielle déterminera θ en fonction de t et de deux constantes arbitraires.

En la multipliant par $2d\theta$, on l'intègre une première fois; ce qui donne

$$(4)\qquad K^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2ag\cos\theta + a^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = c.$$

Soit α la valeur initiale de θ, on aura

$$c = -2ag\cos\alpha,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \sqrt{2ag}.dt = -\sqrt{\frac{K^2 + a^2\sin^2\theta}{\cos\theta - \cos\alpha}}\,d\theta.$$

Cette quadrature ne pourra être calculée qu'approximativement.

θ étant connu en fonction de t, on aurait N par l'équation (2), et aussi $y_1 = \mathrm{CB} - a\cos\theta$; on connaîtrait, de plus, le chemin OC parcouru par l'axe du cylindre, car

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OD} - a\sin\theta = \text{const.} - a\sin\theta.$$

Il est aisé de déterminer la trajectoire décrite par chaque point du cylindre. Remarquons, en effet, que la verticale LL' étant fixe, ainsi que l'horizontale OD, et la distance CG demeurant invariable, le rayon mobile qui passe par le centre de gravité est dans la condition d'une droite assujettie à glisser sur deux axes rectangulaires, de manière que la partie interceptée entre ces axes soit constante. Or on sait que *chaque point m* pris sur cette droite, ou sur son prolongement, *décrit une ellipse* dont les demi-axes sont les distances mG, mC, et coïncident avec les deux directrices fixes.

Si l'on suppose que le centre de gravité du cylindre soit très-peu distant de son axe, la quantité a sera très-petite, et l'on pourra négliger, sans erreur sensible, le terme $a^2\sin^2\theta$ sous le radical de la formule (5). Ce terme sera également négligeable si, a restant quelconque, on suppose θ très-petit; dans l'un et l'autre cas, la formule se réduit à

$$\sqrt{2ag}\,.\,dt = \frac{-\mathrm{K}\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

C'est la formule du pendule simple ordinaire; elle est réductible aux fonctions elliptiques. On en déduira, comme dans la théorie du pendule, la loi des petites oscillations du cylindre de part et d'autre de la verticale LL'.

L'équation (4) aurait pu être obtenue directement par le principe des forces vives, sans passer par les équations différentielles du second ordre, où entre la pression N.

D'après ce principe, qui est évidemment applicable ici, on a, en général,

$$\Sigma m v^2 = c + 2\int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz). \tag{6}$$

Or, dans tout système de points matériels, on a aussi

$$\Sigma m v^2 = M v_1^2 + \Sigma m \omega^2,$$

v_1 désignant la vitesse absolue du centre de gravité, et ω la vitesse relative du point m dans son mouvement autour de ce centre.

Ici $v_1 = \frac{dy_1}{dt}$, puisque $\frac{dx_1}{dt} = 0$; et, d'après la valeur de $\frac{dy_1}{dt}$,

$$v_1 = a \sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

d'ailleurs

$$\sum m\omega^2 = \sum m r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = MK^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Pour un point quelconque du cylindre, on a

$$X = 0, \quad Z = 0, \quad Y = -mg,$$

et la résistance normale N n'intervient pas dans le second membre de l'équation des forces vives; on a donc

$$\int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = -Mgy_1 = Mga\cos\theta + \text{const.}$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (6), on retrouve l'équation (4).

CHAPITRE V.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ATTACHÉ PAR UN FIL INEXTENSIBLE A UN POINT FIXE, ET DONT UNE FACE S'APPUIE CONSTAMMENT SUR UN PLAN HORIZONTAL.

Un corps solide repose, par une face plane AMN, *sur un plan horizontal* (fig. 85), *et il est retenu par un fil inextensible* OA, *constamment tendu et attaché, d'une part, au point* A *de la surface du mobile, de l'autre, au point fixe* O. *On propose de déterminer le mouvement, abstraction faite du frottement et de la masse du fil.*

Soient G le centre de gravité du mobile, M sa masse; $OA = a$, $AG = b$. La position du corps sera déterminée à chaque instant par deux angles : l'un φ, que le fil OA fait avec un axe fixe Oy ; l'autre ψ, que la droite AG fait avec le même axe.

1. *Première méthode.* — Si nous concevons appliquée au mobile, dans la direction AO, une force égale à la tension inconnue T du fil, nous pourrons le considérer comme un corps libre, et établir les équations propres à déterminer son double mouvement; savoir, le mouvement de translation de son centre de gravité G et le mouvement de rotation autour de ce centre.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité, par rapport à deux axes rectangulaires dont l'un est Oy; ces coordonnées sont des fonctions connues des deux angles φ et ψ :

$$x_1 = a \sin\varphi + b \sin\psi,$$
$$y_1 = a \cos\varphi + b \cos\psi.$$

La tension T étant la seule force qui agisse sur le sys-

tème, si on la transporte en G, on aura, pour les équations du mouvement de translation,

$$(1)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -T\sin\varphi, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = -T\cos\varphi. \end{cases}$$

Le corps tourne autour du centre de gravité G comme autour d'un axe vertical passant par ce point, sans qu'il soit rien changé aux forces motrices. Le moment de la tension T, par rapport au point G, a pour valeur absolue T.GI ou $Tb\sin(\psi-\varphi)$, et cette force tend à diminuer l'angle ψ. Soit, comme à l'ordinaire, MK^2 le moment d'inertie du corps par rapport à un axe vertical passant par le point G; l'équation du mouvement de rotation du corps autour de ce point sera

$$(2)\qquad MK^2\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Tb\sin(\psi-\varphi).$$

Les équations (1) et (2) suffiront pour déterminer les inconnues φ, ψ, T en fonction du temps, après qu'on y aura remplacé x_1, y_1 par leurs valeurs en fonction de φ et de ψ : cette substitution faite, l'élimination de T conduira à deux équations différentielles du second ordre, entre φ et ψ.

Ces équations ne sont pas linéaires; nous ne les écrirons pas, parce que nous allons exposer une autre méthode qui fournit immédiatement deux intégrales premières de ces équations.

Remarquons seulement que l'une de ces intégrales, qui n'est autre que l'équation des forces vives, se déduirait assez facilement du système des équations (1) et (2), en ajoutant d'abord l'une à l'autre les équations (1) multipliées respectivement par $2\,dx_1$, $2\,dy_1$, ce qui donne

$$Md\left(\frac{dx_1^2+dy_1^2}{dt^2}\right) = -2T(\sin\varphi.dx_1+\cos\varphi.dy_1),$$

ou bien, vu les valeurs de x_1, y_1,

$$M d\left[a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2ab\cos(\psi-\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\right] = 2Tb\sin(\psi-\varphi)\,d\psi;$$

puis, l'équation (2) multipliée par $2d\psi$ donne

$$MK^2 d\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = -2Tb\sin(\psi-\varphi)\,d\psi.$$

Or le second membre de cette équation est précisément égal à celui de la précédente pris en signe contraire, et comme les premiers membres sont des différentielles exactes, on voit qu'en ajoutant membre à membre ces deux équations, on en aura une troisième intégrable.

Voici cette intégrale première,

$$a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (b^2+K^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2ab\cos(\psi-\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} = C^2.$$

Quant à l'autre intégrale, Euler (*) n'est parvenu à l'obtenir qu'après beaucoup de tâtonnements et par un procédé détourné que nous ne rapporterons pas. Le lecteur curieux de connaître cette analyse pourra consulter le Mémoire d'Euler.

2. *Méthode plus simple.* — Deux des principes généraux de la dynamique sont évidemment applicables : celui de la conservation des forces vives et celui de la conservation des aires, ce dernier en prenant le point fixe O pour centre des aires. Chacun d'eux fournit une intégrale première des équations du mouvement.

1°. On a

$$\Sigma m v^2 = \text{const.}$$

Or, dans tout système,

$$\Sigma m v^2 = M v_1^2 + \Sigma m \omega^2,$$

(*) Acta Academiæ Petropolitanæ, 1778.

v_1 désignant la vitesse absolue du centre de gravité, et ω la vitesse, relative à ce centre, d'un point quelconque du système. Calculons v_1 et $\Sigma m\omega^2$:

$$v_1^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{dt^2} = a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2ab\cos(\psi - \varphi)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt},$$

$$\sum m\omega^2 = \text{MK}^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Par conséquent, on a l'équation des forces vives déjà obtenue

$$(3)\quad a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (b^2 + \text{K}^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2ab\cos(\psi - \varphi)\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d\psi}{dt} = \text{C}^2.$$

2°. On a

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.}$$

Soient ξ, η, les coordonnées d'un point quelconque (x, y) relatives au centre de gravité, en sorte que

$$x = x_1 + \xi,\quad y = y_1 + \eta;$$

si l'on substitue ces valeurs dans le premier membre de l'équation précédente, et qu'on ait égard aux équations

$$\Sigma m\xi = 0,\quad \Sigma m\eta = 0,$$

il vient

$$\Sigma m(xdy - ydx) = \text{M}(x_1dy_1 - y_1dx_1) + \Sigma m(\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Cette équation exprime une propriété générale du mouvement, savoir que la somme des produits des masses de tous les points d'un système multipliés respectivement par les aires infiniment petites décrites par ces points autour d'un centre fixe, pendant l'instant dt, est égale au produit de la masse totale M par l'aire décrite dans le même instant par le centre de gravité, plus la somme des produits des masses multipliées par les aires décrites dans le mouvement relatif autour de ce centre.

Passant aux coordonnées angulaires φ et ψ, on a

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = -[a^2 d\varphi + b^2 d\psi + ab\cos(\psi - \varphi)(d\varphi + d\psi)],$$
$$\Sigma m(\xi d\eta - \eta d\xi) = -\mathrm{MK}^2 d\psi;$$

et, par suite,

$$(4)\quad a^2\frac{d\varphi}{dt} + (b^2 + \mathrm{K}^2)\frac{d\psi}{dt} + ab\cos(\psi - \varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\right) = \mathrm{D}^2.$$

C et D sont deux constantes arbitraires qu'on déterminera d'après les valeurs initiales données de φ, ψ, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$.

3. Avant d'aller plus loin, nous montrerons encore comment les intégrales premières (3) et (4) peuvent se déduire des équations de Lagrange.

En désignant par T la demi-somme des forces vives du système, par V la fonction des forces, par φ' et ψ' les dérivées $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, on a les équations (page 7),

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}\right)}{dt} - \dfrac{d\mathrm{T}}{d\varphi} - \dfrac{d\mathrm{V}}{d\varphi} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\left(\dfrac{d\mathrm{T}}{d\psi'}\right)}{dt} - \dfrac{d\mathrm{T}}{d\psi} - \dfrac{d\mathrm{V}}{d\psi} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit d'abord l'intégrale des forces vives,

$$\mathrm{T} - \mathrm{V} = \text{const.}$$

Mais comme il n'y a pas de forces appliquées au système, V est une constante; on a donc simplement

$$\mathrm{T} = \text{const.}$$

Or la valeur de T ou de $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, a été calculée plus haut:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}[a^2\varphi'^2 + (b^2 + \mathrm{K}^2)\psi'^2 + 2ab\cos(\psi - \varphi).\varphi'\psi'];$$

on retrouve ainsi l'équation (3).

De l'expression de T on tire

$$\frac{dT}{d\varphi} = Mab\sin(\psi - \varphi).\varphi'\psi',$$

$$\frac{dT}{d\psi} = -Mab\sin(\psi - \varphi).\varphi'\psi',$$

$$\frac{dT}{d\varphi'} = M[a^2\varphi' + ab\cos(\psi - \varphi)\psi'],$$

$$\frac{dT}{d\psi'} = M[(b^2 + K^2)\psi' + ab\cos(\psi - \varphi)\varphi'].$$

D'ailleurs, V étant une constante, $\frac{dV}{d\varphi}$ et $\frac{dV}{d\psi}$ sont nulles.

Avant de substituer ces valeurs dans les équations (5), remarquons que $\frac{dT}{d\varphi}$ et $\frac{dT}{d\psi}$ étant égales et de signes contraires, nous éliminerons de suite ces dérivées, en ajoutant ces équations membre à membre, ce qui donnera

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\varphi'}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} = 0,$$

équation intégrable; d'où

$$\frac{dT}{d\varphi'} + \frac{dT}{d\psi'} = \text{const.},$$

ou enfin

$$M[a^2\varphi' + (b^2 + K^2)\psi' + ab\cos(\psi - \varphi)(\varphi' + \psi')] = \text{const.}$$

C'est l'équation (4).

4. Il s'agit maintenant d'intégrer le système des équations (3) et (4), afin d'avoir φ et ψ en fonction de t.

A cet effet, nous remplacerons ψ par une autre variable $\theta = \psi - \varphi$; θ représente l'angle GAI que fait le rayon vecteur du centre de gravité avec la direction du fil. Cet angle mesure la rotation du corps autour de son point d'attache. Nous trouvons à remplacer ψ par θ, l'avantage que l'autre

variable φ n'entrera plus dans les équations (3) et (4) que par sa différentielle, et par conséquent on l'éliminera aisément. Cette transformation conduit aux équations :

$$(6)\left\{\begin{aligned}&(a^2+b^2+2ab\cos\theta+K^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+(b^2+K^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\\&+2(b^2+K^2+ab\cos\theta)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}=C^2,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad (a^2+b^2+2ab\cos\theta+K^2)\frac{d\varphi}{dt}+(b^2+K^2+ab\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}=D^2.$$

On tire $\frac{d\varphi}{dt}$ de (7), et portant cette valeur dans (6), il arrive que le terme du premier degré en $\frac{d\theta}{dt}$ disparaît, et il reste

$$a^2(K^2+b^2\sin^2\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C^2(a^2+b^2+2ab\cos\theta+K^2)-D^4;$$

les variables se séparent. Enfin

$$(8)\qquad dt=\pm\frac{a\sqrt{K^2+b^2\sin^2\theta}\,.\,d\theta}{\sqrt{C^2(a^2+b^2+2ab\cos\theta+K^2)-D^4}}.$$

Si l'on cherche à ramener cette différentielle aux fonctions algébriques, on trouve que la quantité soumise au radical dans le dénominateur se transforme en un polynôme d'un degré supérieur au deuxième. Par conséquent, cette quadrature ne pourra être évaluée qu'approximativement.

En substituant la valeur précédente de dt dans l'équation (6), on aura pour $d\varphi$ une valeur de la forme,

$$d\varphi=F(\theta)\,d\theta.$$

Mais on ne peut, non plus, l'intégrer sous forme finie.

θ et φ étant connus approximativement en fonction de t, on en conclut la valeur de $\psi=\theta+\varphi$, et aussi la tension T à l'aide des formules données dans la première méthode.

Discutons quelques cas particuliers.

Soit $b = 0$; le point d'attache du fil coïncide avec le centre de gravité du corps.

Alors φ désigne l'angle GOy (*fig.* 86), et ψ l'angle qu'un rayon, mené du centre G à un point déterminé C du corps et mobile avec lui, fait avec l'axe Oy; ce point C étant arbitraire, on peut choisir celui qui se trouvait en A sur OG au commencement du mouvement, de sorte que la valeur initiale de θ ou de l'angle OGC sera nulle.

La formule (8), dans laquelle on fait $b = 0$, se réduit à

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{C^2(a^2 + K^2) - D^4}}{aK}.$$

Ainsi, $\frac{d\theta}{dt}$ est constant, et l'on trouve de même des valeurs constantes pour $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$. Le corps tourne donc uniformément autour du fil, et le fil tourne lui-même uniformément autour du point fixe.

Ces résultats sont d'ailleurs des conséquences évidentes des propriétés du centre de gravité en dynamique.

Comme il est impossible d'obtenir sous forme finie les valeurs exactes de φ et ψ, on ne saurait discuter toutes les circonstances du mouvement d'une manière complète. Cependant l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ permet d'assigner certaines limites pour l'angle de rotation du corps autour de son point d'attache.

Cette rotation ne pourra changer de sens, qu'autant que θ atteindra une valeur telle que l'on ait $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ou

$$C^2(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + K^2) - D^4 = 0.$$

Toutefois les constantes C et D, qui dépendent des données initiales, pourraient être telles, que cette équation fournît pour $\cos\theta$ une valeur plus grande que l'unité.

Soit $OG = R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$; l'équation ci-dessus équivaut à

$$C^2(R^2 + K^2) - D^4 = 0,$$

d'où

$$R = \frac{1}{C}\sqrt{D^4 - K^2C^2}.$$

Cette valeur de R doit, pour être admissible, être comprise entre $a - b$ et $a + b$; et, comme elle est unique, elle indique les écarts extrêmes du corps, de part et d'autre du fil OA, et, par suite, un mouvement oscillatoire en général.

Supposons, par exemple, qu'au commencement du mouvement la ligne AG ait été perpendiculaire à OA (*fig.* 87), et que le corps ait reçu une percussion dirigée perpendiculairement à AG; on aura, pour $t = 0$,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = f;$$

et, par suite,

$$C^2 = (b^2 + K^2)f^2,$$
$$D^2 = (b^2 + K^2)f.$$

Ces valeurs, substituées dans l'expression précédente de R, donnent $R = b$; telle est la valeur limite de R pour laquelle la rotation change de sens.

Elle est impossible si l'on a $a > 2b$, puisqu'alors le côté OG du triangle OAG serait plus petit que la différence des deux autres; dans ce cas, le corps tournera indéfiniment dans le même sens, autour de son point d'attache.

Examinons encore le cas d'une percussion initiale telle que l'on ait

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = h, \quad \text{d'où} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0;$$

et soit R_0 la valeur initiale du rayon vecteur OG. Les équa-

tions (6) et (7) donnent alors

$$C^2 = (R_0^2 + K^2)\,h^2,$$
$$D^2 = (R_0^2 + K^2)\,h\,;$$

et la valeur de R qui répond à une limite possible de l'angle de rotation, c'est-à-dire $\frac{1}{C}\sqrt{D^4 - K^2 C^2}$, se réduit à R_0. La position initiale du corps suffit donc pour déterminer l'amplitude de l'oscillation, sans qu'il soit besoin de recourir à l'intensité de la percussion.

En remplaçant dans l'équation (8) D^4 par sa valeur $C^2(R_0^2 + K^2)$ et $(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)$ par R^2, il vient

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C\sqrt{R^2 - R_0^2}}{a\sqrt{K^2 + b^2\sin^2\theta}}.$$

Supposons de plus qu'à l'origine du mouvement le centre de gravité et le point d'attache aient été en ligne droite avec le point fixe, dans l'ordre G, A, O ; en sorte que l'on ait

$$\theta_0 = 0, \quad R_0 = a + b.$$

Comme cette valeur de R_0 est la plus grande que R puisse recevoir, on voit que $\frac{d\theta}{dt}$ serait constamment imaginaire, si l'on n'avait pas, pendant toute la durée du mouvement,

$$R = R_0 \quad \text{et, par suite,} \quad \theta = 0.$$

Donc la ligne OAG demeurera droite et tous les points du système décriront des cercles avec la même vitesse angulaire ; cette vitesse sera fournie par l'équation (7), où l'on fera $\theta = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, d'où

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D^2}{a^2 + b^2 + K^2} = \frac{R_0^2 + K^2}{R_0^2 + K^2}\,h = h.$$

Ainsi la vitesse du mouvement circulaire sera constante et égale à h.

On pourra, par une discussion semblable, reconnaître s'il existe des limites pour l'angle φ qui mesure la rotation de la droite OA autour du point fixe; à cet effet, on posera $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ dans les équations (6) et (7), puis on éliminera entre elles $\frac{d\theta}{dt}$. On trouvera ainsi

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 + K^2}}{ab}\left(\frac{D^2}{C} - \sqrt{b^2 + K^2}\right).$$

Si cette valeur de $\cos\theta$ est plus petite que 1, pour un état initial donné du système, on en déduira pour l'angle φ les limites cherchées : c'est lorsque φ atteindra ces limites que le mouvement angulaire du fil OA changera en général de sens.

LIVRE QUATRIÈME.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS DE FIGURE VARIABLE.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT D'UN FIL FLEXIBLE CHARGÉ DE DEUX MASSES PESANTES.

Un fil flexible inextensible et sans masse est suspendu à un point fixe O *et chargé de deux masses pesantes* m, m' (fig. 88). *On suppose qu'à l'origine du mouvement ces deux points matériels aient été écartés de la verticale* Oy, *sans rester en ligne droite avec le point fixe, mais sans sortir d'un plan vertical passant par ce point, puis abandonnés à eux-mêmes, et l'on propose de déterminer les petites oscillations du système.* (Concours d'agrégation de 1844.)

Le mouvement oscillatoire de chaque point aura évidemment lieu dans le plan vertical yOx, qui passe par la position initiale du fil; désignons par a et b les deux longueurs Om, mm'; les inconnues du problème sont les deux angles

$$mOy = \theta, \quad m'my' = \varphi$$

que font ces deux portions du fil avec la verticale.

1. Soient x, y, x', y' les coordonnées des deux points m, m'; v, v' leurs vitesses, au bout du temps t; g l'intensité de la pesanteur. Le principe des forces vives et celui des

aires fournissent les deux équations

$$mv^2 + m'v'^2 = 2g(my + m'y') + c,$$

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + m'\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = g(mx + m'x').$$

Pour y introduire les deux inconnues θ, φ, on a les relations

$$\begin{cases} x = a\sin\theta, \\ y = a\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = a\sin\theta + b\sin\varphi, \\ y' = a\cos\theta + b\cos\varphi; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$v^2 = a^2\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

$$v'^2 = a^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + b^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} \text{ ou } \frac{d}{dt}(xdy - ydx) = -\frac{d(a^2d\theta)}{dt} = -a^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2} \text{ ou } \frac{d}{dt}(x'dy' - y'dx') = -a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - b^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$- ab\cos(\varphi - \theta)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + ab\sin(\varphi - \theta)\left(\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{d\theta^2}{dt^2}\right).$$

Les équations des forces vives et des aires prennent la forme :

$$(1)\quad \begin{cases} (m + m')a^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + m'b^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2m'ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \\ = 2g[(m + m')a\cos\theta + m'b\cos\varphi] + c, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} (m + m')a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + m'b^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'ab\cos(\varphi - \theta)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \\ \qquad + m'ab\sin(\varphi - \theta)\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) \\ \qquad = -g[(m + m')a\sin\theta + m'b\sin\varphi]. \end{cases}$$

Voilà les deux équations propres à déterminer θ et φ en

fonction de t. Supposons que l'on ait, pour $t = 0$,

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad \theta = \alpha, \quad \varphi = \beta;$$

il en résulte, pour la constante arbitraire c, la valeur

$$c = -2g[(m + m')a\cos\alpha + m'b\cos\beta].$$

On ne peut pas intégrer, en général, sous forme finie, les équations (1) et (2). Nous nous bornerons au cas où les oscillations sont supposées très-petites. α, β, θ, φ sont alors des quantités très-petites dont on peut négliger les carrés et les produits, vis-à-vis des premières puissances; les dérivées $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ sont aussi des quantités du même ordre que les fonctions θ et φ (*). Comme l'équation (1), dans laquelle c sera remplacée par sa valeur, ne renferme pas de termes du premier ordre, on devra y conserver ceux du deuxième ordre.

On trouve ainsi :

$$(3)\left\{\begin{aligned} &(m + m')a^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + m'b^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2m'ab\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \\ &= g[(m + m')a(\alpha^2 - \theta^2) + m'b(\beta^2 - \varphi^2)], \end{aligned}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{aligned} &(m + m')a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + m'b^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'ab\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \\ &= -g[(m + m')a\theta + m'b\varphi]. \end{aligned}\right.$$

L'équation (3) est du premier ordre, mais elle n'est pas

(*) En effet, soit $\theta = f(t)$; on a

$$\frac{d\theta}{dt} = f'(t). \quad \text{Or} \quad f(t + h) - f(t) = hf'(t + \varepsilon h),$$

ε étant comprise entre 0 et 1. $f(t)$ et $f(t + h)$ sont par hypothèse des quantités très-petites, quel que soit l'accroissement fini h; donc $f'(t + \varepsilon h)$ est aussi une quantité très-petite, ou, ce qui revient au même, $\frac{d\theta}{dt}$ reste constamment très-petite en même temps que la fonction θ. *En général, quand une fonction continue prend de très-petites valeurs pour toutes les valeurs de la variable comprises entre certaines limites, la fonction dérivée est également très-petite dans le même intervalle.*

linéaire, c'est pourquoi on la différentie; puis on en retranche le produit de l'équation (4) par $\frac{d\theta}{dt}$, et l'on obtient, suppression faite du facteur commun $\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)$, l'équation linéaire

$$(5) \qquad a\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0,$$

qui peut remplacer l'équation (3).

Éliminant ensuite $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ entre cette dernière et l'équation (4), on a

$$(6) \qquad ma\frac{d^2\theta}{dt^2} + g(m + m')\theta - gm'\varphi = 0.$$

C'est avec les équations (5) et (6) que nous achèverons la solution du problème; mais auparavant nous montrerons comment on aurait pu les obtenir par des calculs plus simples.

2. Partant du principe de d'Alembert, exprimons directement que les forces perdues se font équilibre à l'aide des liaisons du système. Les composantes de la force perdue, au point m', sont

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad m'\left(g - \frac{d^2y'}{dt^2}\right);$$

cette force, pour être détruite par la résistance du fil, doit être dirigée suivant mm', ce qui fournit l'équation

$$(7) \qquad (y - y')\frac{d^2x'}{dt^2} + (x - x')\left(g - \frac{d^2y'}{dt^2}\right) = 0.$$

Le fil Om est sollicité, au point m, par le poids mg et par la tension du fil mm'; en conséquence, les composantes de la force perdue au point m sont

$$-\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right), \quad m\left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + m'\left(g - \frac{d^2y'}{dt^2}\right);$$

cette force doit être dirigée suivant Om, ce qui fournit la deuxième équation,

$$(8)\quad y\left(m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)+x\left[m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\right]=0$$

Ces équations, associées aux liaisons

$$x^2+y^2=a^2,\quad (x-x')^2+(y-y')^2=b^2,$$

résolvent le problème. On peut s'exercer à retrouver les équations (7) et (8), en partant de l'équation des vitesses virtuelles,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'+m\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g\right)\delta y+m'\left(\frac{d^2y'}{dt^2}-g\right)\delta y'=0,$$

et la combinant, par la méthode des multiplicateurs, avec les équations de liaisons.

Dans le cas des petites oscillations, on a simplement

$$x=a\theta,\quad x'=a\theta+b\varphi,$$
$$y=a,\quad y'=a+b,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad \frac{d^2x'}{dt^2}=a\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y'}{dt^2}=0,$$

et, par suite, les équations (7) et (8) se réduisent à

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g\varphi=0,$$
$$(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2}+m'b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(m+m')g\theta=0,$$

qui coïncident avec le système (5) et (6).

3. Enfin, on peut encore employer avec avantage les équations de Lagrange (page 7) :

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)}{dt}-\frac{dT}{d\theta}-\frac{dV}{d\theta}=0,$$
$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\varphi'}\right)}{dt}-\frac{dT}{d\varphi}-\frac{dV}{d\varphi}=0,$$

où θ' et φ' désignent les dérivées $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$; T désigne la demi-somme des forces vives du système, et V la fonction des forces. On trouve d'abord aisément

$$V = (m + m')\, ga \cos\theta + m' gb \cos\varphi,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left[(m + m')\, a^2 \theta'^2 + m' b^2 \varphi'^2 + 2 m' ab \cos(\varphi - \theta).\theta'\varphi'\right].$$

Ces valeurs, substituées dans les deux équations précédentes, fournissent les équations générales du mouvement,

$$(m + m')a \frac{d^2\theta}{dt^2} + m'b\cos(\varphi - \theta)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - m'b\sin(\varphi - \theta)\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right)$$
$$- m'b\sin(\varphi - \theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d\varphi}{dt} + (m + m')\, g\sin\theta = 0,$$

$$b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\cos(\varphi - \theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - a\sin(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right)$$
$$+ a\sin(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\sin\varphi = 0.$$

On aurait pu remplacer l'une d'elles par l'*équation des forces vives*, qui n'est que du premier ordre; mais nous ne l'avons pas fait, parce que cette dernière équation se prête moins bien à la détermination des *petites oscillations* dont nous devons nous occuper.

Si les oscillations sont supposées très-petites, on néglige les carrés de θ, φ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, et les produits de ces variables; les équations se réduisent ainsi aux deux suivantes :

$$(m + m')\, a\frac{d^2\theta}{dt^2} + m'b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (m + m')g\theta = 0,$$

$$b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\varphi = 0.$$

La première peut encore se simplifier, eu égard à la se-

conde, et l'on a finalement le système déjà trouvé

$$(5) \qquad a\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0,$$

$$(6) \qquad ma\frac{d^2\theta}{dt^2} + g(m+m')\theta - gm'\varphi = 0.$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants, tandis que si l'on avait employé l'équation des forces vives, on aurait obtenu une équation, du premier ordre à la vérité, mais *non linéaire*, puisqu'elle eût évidemment renfermé les carrés de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

La méthode ordinaire conduit aux intégrales générales

$$\theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2 \sin t\sqrt{r_2},$$

$$\varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1\mu_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2\mu_2 \sin t\sqrt{r_2}.$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre constantes arbitraires; r_1, r_2 sont des quantités réelles et positives, racines de l'équation du deuxième degré en r,

$$(9) \qquad [(m+m')g - mar](g - br) - m'agr = 0,$$

et μ_1, μ_2 sont les valeurs correspondantes de μ, tirées de l'équation

$$(10) \qquad \mu = \frac{ar}{g - br};$$

μ_1 et μ_2 sont de signes contraires, car l'une des racines de l'équation (9) est plus petite que $\frac{g}{b}$, et l'autre plus grande que $\frac{g}{b}$, puisque l'hypothèse $r = \frac{g}{b}$ rend le premier membre négatif. Comme on suppose qu'il n'y a pas de vitesses initiales, on doit avoir, pour $t = 0$,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

ce qui entraîne

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad B_2 = 0.$$

Puis, comme α et β sont les valeurs initiales de θ et de φ, on aura

$$(11) \qquad A_1 + A_2 = \alpha, \quad A_1\mu_1 + A_2\mu_2 = \beta,$$

d'où l'on tirera les valeurs des constantes A_1 et A_2. Cela fait, le mouvement du système sera déterminé par les formules

$$(12) \qquad \begin{cases} \theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2}, \\ \varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2}. \end{cases}$$

Dans le cas où les deux points matériels se trouveraient, à l'origine du mouvement, en ligne droite avec le point de suspension, on aurait

$$\alpha = \beta,$$

et, par suite,

$$A_1 = \frac{\alpha(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}, \quad A_2 = \frac{\alpha(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Soit $\mu_1 > 0$, μ_2 sera < 0; il est aisé de voir, en outre, que μ_1 sera > 1, en sorte que les valeurs des constantes A_1, A_2 seront positives. Si l'on demandait *quelle condition doit être remplie pour que chacun des points m et m' oscille comme un pendule simple*, on poserait, dans les équations (11), $A_1 = 0$ ou bien $A_2 = 0$; soit $A_2 = 0$, il en résulte

$$A_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et, par suite, l'équation (10) donne

$$r_1 = \frac{\beta g}{a\alpha + b\beta}:$$

cette valeur, étant substituée dans l'équation (9), conduit à une relation entre les masses m, m', les distances a, b, et les écarts α, β, savoir :

$$(13) \quad (m + m')a\alpha^2 + (m + m')(b - a)\alpha\beta - m'b\beta^2 = 0.$$

Telle est la condition cherchée : elle est impossible si $\alpha = \beta$, car l'hypothèse $\alpha = \beta$ réduit l'équation précédente à $mb = 0$, d'où $m = 0$ ou $b = 0$, ce qui veut dire que les deux points matériels se réduisent à un seul. Effectivement, les équations (12) donneraient, dans ce cas, pour θ et φ, des valeurs constamment égales entre elles,

$$\theta = \varphi = \alpha \cos t \sqrt{r_1},$$

c'est-à-dire que les deux points matériels demeureraient toujours en ligne droite avec le point de suspension, ce qui est évidemment impossible, à moins qu'ils ne se confondent.

Étant données les masses m, m' et les distances a, b, l'équation (13) fournira toujours une valeur réelle, positive et plus petite que 1, pour le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$: soit par exemple $a = b$, on aura

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{m'}{m + m'}},$$

puis

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m + m'}{m'}}$$

et

$$r_1 = \frac{g}{a\left(1 + \sqrt{\frac{m'}{m + m'}}\right)}.$$

En général, quand la condition (13) sera remplie, on aura

$$\theta = \alpha \cos t \sqrt{r_1}, \quad \varphi = \beta \cos t \sqrt{r_1};$$

les durées des petites oscillations seront donc les mêmes pour les deux pendules, mais leur amplitude sera différente; ils seront en même temps d'un même côté de la verticale, et se confondront en même temps avec elle.

CHAPITRE II.

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE DEUX CORPS PESANTS, DONT L'UN NE PEUT QUE GLISSER SUR UN PLAN FIXE, TANDIS QUE L'AUTRE EST ASSUJETTI A GLISSER SUR LA SURFACE DU PREMIER.

1. *Un prisme homogène, de masse* M, *dont la section droite est un triangle rectangle* ABC (fig. 89), *repose par l'une de ses faces rectangulaires sur un plan horizontal fixe* RR' *sur lequel il peut glisser : un corps pesant de masse m et de dimensions très-petites est posé sur la face hypoténusale* BC *du prisme et glisse suivant la ligne de plus grande pente, de sorte que son centre de gravité et celui du prisme soient toujours compris dans le même plan vertical* ABC. *La pression que le corps m exerce sur le prisme, fait reculer celui-ci dans le sens* AR'. *On propose de déterminer la vitesse de descente du corps m, la trajectoire réelle décrite par l'un de ses points, la vitesse de recul du triangle* ABC, *etc.* (On suppose le frottement insensible. Nous indiquerons, à la fin du chapitre, comment on tiendrait compte du frottement.)

Ce problème est posé dans les œuvres de *Jean Bernoulli*, mais la solution qu'on y trouve est bizarre et manque de clarté. L'auteur décompose d'abord la pesanteur appliquée au corps *m* en deux forces, l'une parallèle au plan BC, l'autre normale à ce plan : celle-ci est à son tour décomposée en deux autres, l'une horizontale, l'autre verticale; cette dernière composante est de nouveau traitée comme la pesanteur, c'est-à-dire décomposée en deux forces, l'une parallèle au plan BC, l'autre normale, et ainsi de suite à

l'infini. Ces composantes (dans lesquelles les masses des deux mobiles s'introduisent d'une manière peu satisfaisante) sont rangées en deux groupes, l'un produisant le mouvement de descente du corps m le long de BC, l'autre le mouvement de recul du triangle ABC, etc. La solution que nous allons présenter sera tirée de la formule générale de la dynamique.

Soit BCA la position initiale de la section droite du prisme, et prenons pour axes des coordonnées la verticale CAy et l'horizontale Cx. Au bout du temps t, le triangle BCA a pris la position B'C'A', et le corps pesant est venu en m. Soient x, y les coordonnées d'une molécule μ de ce corps : les moments virtuels des composantes de la force perdue par cette molécule sont $-\mu \frac{d^2x}{dt^2}\delta x$, $\mu\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y$; la formule générale de la dynamique renfermera une somme de termes semblables pour tous les points du corps m, savoir,

$$-\sum \mu \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \sum \mu\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right).$$

Mais, puisque ces points décrivent des lignes égales et parallèles, leurs coordonnées ne diffèrent les unes des autres que de quantités constantes pendant toute la durée du mouvement; $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ sont donc les mêmes pour tous les points à chaque instant, aussi bien que δx, δy, de sorte que

$$\sum \mu \frac{d^2x}{dt^2}\delta x = m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x,$$

$$\sum \mu\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y;$$

et x et y peuvent représenter les coordonnées d'un point quelconque du corps m, par exemple de son centre de gravité. Le corps m n'entrera ainsi dans le calcul que comme

un simple point matériel, de masse m, assujetti à suivre l'hypoténuse mobile B' C'.

Pareillement, la somme des moments virtuels des forces perdues par les divers points matériels du prisme se réduira, vu que les ordonnées verticales de ces points sont constantes, à

$$-\mathrm{M}\frac{d^2 x_1}{dt^2}\delta x_1,$$

x_1 pouvant désigner l'abscisse d'un point quelconque du prisme : nous choisirons de préférence le centre de gravité G'. Cela posé, le principe de d'Alembert fournit l'équation

$$(1)\quad -m\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + m\left(g - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y - \mathrm{M}\frac{d^2 x_1}{dt^2}\delta x_1 = 0.$$

Il faut maintenant traduire en équation les liaisons du système.

Déjà nous avons introduit la condition $y_1 = \text{const.}$

De plus, le triangle P m C' donne

$$\mathrm{PC'} \,.\, \text{tang ABC} = \mathrm{P}m\,;$$

or,

$$\mathrm{P}m = y, \quad \mathrm{PC'} = x + \mathrm{GG'} = x - x_1 + a,$$

a désignant l'abscisse initiale $\frac{\mathrm{AB}}{3}$ du centre de gravité G. Soit α l'angle ABC, on aura pour seconde équation de condition

$$(2)\qquad (x - x_1 + a)\,\text{tang}\,\alpha - y = 0,$$

d'où

$$\text{tang}\,\alpha.\delta x - \delta y - \text{tang}\,\alpha.\delta x_1 = 0.$$

Multiplions cette dernière équation par l'indéterminée λ, et ajoutons à l'équation (1); puis égalons à zéro, selon la méthode, les coefficients de toutes les variations, nous

aurons

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \tang \alpha, \tag{3}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \lambda, \tag{4}$$

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\lambda \tang \alpha. \tag{5}$$

Ces équations auraient pu être établies en introduisant la pression qui a lieu au contact du corps m et du prisme, normalement à la face BC, ce qui eût permis de traiter m comme un point libre. Cette pression n'est autre que le facteur $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$.

A ces trois équations il faut associer l'équation (2); si l'on élimine λ, il restera trois équations propres à déterminer x, y et x_1 en fonction du temps.

En ajoutant (3) et (5) membre à membre, on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + M\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0,$$

et, intégrant,

$$m\frac{dx}{dt} + M\frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Nous n'ajoutons pas de constante arbitraire, parce que nous supposons qu'à l'origine le mobile m a été abandonné à lui-même, sans recevoir de vitesse. Une seconde intégration donne

$$mx + Mx_1 = \text{const.}$$

Soit X l'abscisse du centre de gravité du système des deux masses m et M, on a

$$mx + Mx_1 = (M + m)X,$$

donc

$$X = \frac{\text{const.}}{M + m};$$

c'est-à-dire que *le centre de gravité du système ne sort pas de la verticale qui passe par sa position initiale.* Ce résultat est d'ailleurs une conséquence du principe relatif au mouvement du centre de gravité d'un système libre; on peut, en effet, remplacer l'action du plan fixe RR′ par une force normale à ce plan, et si l'on conçoit que cette force verticale, ainsi que la pesanteur appliquée au corps m, soient transportées au centre de gravité du système, ce point n'étant soumis qu'à l'action de forces verticales, se mouvra dans la verticale qui le contient à l'origine, puisque d'ailleurs il part du repos.

Cherchons les valeurs de y et x en fonction de t. En éliminant λ entre (3) et (4), on a d'abord

$$(6) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \text{tang}\,\alpha \frac{d^2y}{dt^2} = g\,\text{tang}\,\alpha\,;$$

puis, si l'on élimine x_1 entre (2) et (5), il vient

$$\text{M}\,\text{tang}\,\alpha . \frac{d^2x}{dt^2} - \text{M}\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\,\text{tang}^2\alpha = 0,$$

et, remplaçant λ tang α par sa valeur tirée de (3),

$$(7) \qquad (\text{M}+m)\,\text{tang}\,\alpha \frac{d^2x}{dt^2} - \text{M}\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Les équations (6) et (7) fourniront pour $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ des valeurs constantes; par conséquent, la force accélératrice du corps m est constante en grandeur et en direction; et comme ce corps part du repos, il décrit une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré. Pour avoir la direction de cette droite, il suffit de tirer de l'équation (7) le rapport

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{\text{M}+m}{\text{M}}\,\text{tang}\,\alpha\,;$$

ce rapport est le coefficient angulaire de la direction de la force, c'est-à-dire de la droite que décrit le corps m. Supposons, pour plus de simplicté, que ce corps parte du sommet C; l'équation de sa trajectoire sera

$$y = \frac{M + m}{M} \operatorname{tang} \alpha . x.$$

Soient h la hauteur AC et b la base AB du triangle ACB; on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{b}, \quad \text{et, par suite,} \quad y = \frac{M + m}{M} \cdot \frac{h}{b} x.$$

Pour $y = h$, on en tire $x = \frac{M b}{M + m}$. Soit AD cette distance; quand le mobile est parvenu en D, le triangle a rétrogradé de la quantité BD ou $b - \frac{M b}{M + m} = \frac{m b}{M + m}$, et, par suite,

$$AD : BD :: M : m;$$

ainsi, le point D divise la base AB en deux segments proportionnels aux masses du corps et du prisme.

Si M est très-grand par rapport à m, le point D sera très-voisin de B, et la route suivie par le corps m différera très-peu de l'hypoténuse BC; elle se confondrait avec cette droite si la masse M était infinie, auquel cas le prisme se comporterait comme un plan incliné fixe. Quant à la force qui produit le mouvement rétrograde du prisme, on a, pour la déterminer,

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Mais

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{M g \operatorname{tang} \alpha}{(M + m) \operatorname{tang}^2 \alpha + M},$$

donc

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{m g \operatorname{tang} \alpha}{(M + m) \operatorname{tang}^2 \alpha + M}.$$

Le mouvement rétrograde du prisme est donc aussi uniformément accéléré.

La valeur de $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ est nulle pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$: si l'on fait varier α entre ces limites, $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ atteint son maximum pour

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{M}{M+m}} :$$

telle est l'inclinaison pour laquelle le mouvement de recul du prisme sera le plus grand possible, toutes choses égales d'ailleurs. Cet angle sera toujours moindre que 45° : en particulier, si $M = m$, on aura $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, d'où

$$b : h :: \sqrt{2} : 1, \quad \text{et} \quad \alpha = 35^\circ - 15' - 42'' \text{ environ.}$$

Le mouvement du centre de gravité du système dans la verticale est aussi uniformément accéléré, car on a, en désignant par Y l'ordonnée de ce point,

$$(M + m) Y = my + M y_1 ;$$

et, comme y_1 est constante,

$$(M + m) \frac{d^2 Y}{dt^2} = m \frac{d^2 y}{dt^2} :$$

mais

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{(M + m) g \operatorname{tang}^2 \alpha}{(M + m) \operatorname{tang}^2 \alpha + M},$$

donc

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{mg \operatorname{tang}^2 \alpha}{(M + m) \operatorname{tang}^2 \alpha + M}.$$

La pression P exercée par le corps m contre la face BC n'est autre que la quantité $\frac{\lambda}{\cos \alpha}$; on a donc

$$P = \frac{m}{\sin \alpha} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m M g \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha},$$

quantité constante et inférieure à $mg \cos \alpha$, c'est-à-dire à la pression que le corps m exercerait sur le plan incliné BC supposé fixe.

2. *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, on suppose qu'on incline le plan d'appui* RR′ *d'un angle* α *à l'horizon, en sorte que l'hypoténuse* BC *devienne horizontale, et l'on demande les mouvements que prendront simultanément le corps m et le prisme (dont la pesanteur n'est plus complétement détruite par la résistance du plan fixe* RR′) (fig. 90).

En prenant toujours pour axes la perpendiculaire CAy et la parallèle Cx au plan fixe, et conservant les mêmes notations, le principe de d'Alembert fournira l'équation

$$(8)\quad \begin{cases} m\left(g\sin\alpha - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m\left(g\cos\alpha - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \\ + \mathrm{M}\left(g\sin\alpha - \dfrac{d^2x_1}{dt^2}\right)\delta x_1 = 0; \end{cases}$$

et, d'après les liaisons du système, on a

$$y_1 = \text{const.},$$

$$(9)\qquad (x_1 - x - a)\operatorname{tang}\alpha - y = 0.$$

Différentiant par δ cette dernière équation, et combinant, comme dans le calcul précédent, l'équation résultante avec l'équation (8), on trouve

$$(10)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \lambda\operatorname{tang}\alpha,$$

$$(11)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg\cos\alpha - \lambda,$$

$$(12)\qquad \mathrm{M}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \mathrm{M}g\sin\alpha + \lambda\operatorname{tang}\alpha.$$

Éliminant λ entre (10) et (11), il vient

$$(13)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \operatorname{tang}\alpha\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

et en intégrant deux fois,

$$x = y\operatorname{tang}\alpha.$$

Nous supposons qu'à l'origine le corps m ait été placé en C, sans vitesse initiale. Ce corps décrit donc une ligne droite, qui n'est autre que la verticale CS. Pour avoir la loi de son mouvement suivant cette droite, il faut associer à l'équation (13) celle qui résultera de l'élimination de λ et de x_1 entre les équations (9), (10) et (12), savoir,

$$(14) \qquad (M+m)\sin\alpha\frac{d^2x}{dt^2} + M\cos\alpha\,\frac{d^2y}{dt^2} = (M+m)\,g\sin^2\alpha.$$

On en tire

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{(M+m)\,g\sin^2\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M},$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(M+m)\,g\sin^2\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M}\,t.$$

Soit v la vitesse du corps m,

$$v = \frac{dy}{dt.\cos\alpha} = \frac{(M+m)\,g\sin^2\alpha}{m\sin^2\alpha + M}\,t.$$

Ainsi, *le corps m descend verticalement d'un mouvement uniformément accéléré;* et l'on voit quel est le retard causé dans sa chute par la présence du prisme.

L'espace $C'm$, parcouru au bout du temps t par le point m, sur l'hypoténuse, est égal à $\frac{y}{\sin\alpha}$: il croît donc proportionnellement au carré du temps. On a ensuite

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \cos\alpha.\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{m\sin^2\alpha + M}.$$

Telle est la force accélératrice qui détermine le mouvement uniformément accéléré du prisme.

Enfin, le mouvement du centre de gravité (X, Y) du

système se déduit sans difficulté des deux équations

$$(M + m)\frac{d^2 X}{dt^2} = m\frac{d^2 x}{dt^2} + M\frac{d^2 x_1}{dt^2},$$

$$(M + m)\frac{d^2 Y}{dt^2} = m\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Les équations (10) et (12) donnent

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + M\frac{d^2 x_1}{dt^2} = (M + m)g\sin\alpha:$$

on connaît d'ailleurs $\frac{d^2 y}{dt^2}$; on aura donc

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = g\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{mg\sin^2\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M}.$$

On conclut de là que le centre de gravité du système du corps m et du prisme décrit, d'un mouvement uniformément accéléré, une ligne droite dont le coefficient d'inclinaison sur le plan fixe RR′ est $\frac{m\tang\alpha}{(M + m)\tang^2\alpha + M}$.

Remarque relative au frottement. — Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu égard au frottement du corps m contre la face mobile BC, non plus qu'au frottement de la face AB contre le plan fixe RR′. Si l'on veut en tenir compte, on s'appuiera sur ces deux lois expérimentales : 1° le frottement d'un corps solide sur un autre est proportionnel à la pression normale qui a lieu au contact des surfaces; 2° le frottement est indépendant de la vitesse.

D'après cela, continuons à désigner par $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$ la pression normale et inconnue qui a lieu au point m (λ n'aura plus la même valeur que précédemment), par f le rapport du frottement à la pression qui correspond au glissement du corps m

sur la face BC (*fig.* 89), par f' le rapport analogue pour le glissement de la face AB sur le plan horizontal : f et f' sont des coefficients constants fournis par l'expérience (*); nous aurons, pour les équations du mouvement,

$$(3\ bis.)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda(\text{tang}\,\alpha-f),$$

$$(4\ bis.)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-\lambda(1+f\,\text{tang}\,\alpha),$$

$$(5\ bis.)\qquad \text{M}\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\lambda(\text{tang}\,\alpha-f)-f'\text{M}g.$$

On les combinera comme leurs analogues (3), (4), (5), en leur associant l'équation (2) qui a toujours lieu; mais on ne retrouvera plus des résultats aussi simples. Cependant l'élimination de λ conduira encore à des valeurs constantes pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, d'où l'on conclura que le corps m, partant du repos, décrit une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré. En même temps, le prisme reculera d'un mouvement uniformément accéléré, puisque la valeur de $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ est aussi constante. Toutefois ceci suppose que l'inclinaison α de la face BC sur l'horizon surpasse *l'angle de frottement* relatif à cette face, c'est-à-dire l'angle sous lequel l'équilibre du corps m commence à se rompre : on sait que la tangente de cet angle est égale au coefficient f; on devra donc avoir tang $\alpha > f$ pour que les mouvements indiqués se réalisent.

(*) Par exemple, si les surfaces frottantes sont :

bois sur bois, à sec, on a $f=0{,}36$,
bois sur métaux, à sec, on a $f=0{,}42$,
métaux sur métaux, à sec, on a $f=0{,}19$.

CHAPITRE III.

SUR LES PETITES OSCILLATIONS RECTILIGNES DE DEUX POINTS MATÉRIELS LIÉS ENTRE EUX, ET A DEUX POINTS FIXES, PAR DES FILS ÉLASTIQUES.

Deux points matériels m, m', *de masses égales, sont liés entre eux, et à deux points fixes* A *et* B (fig. 91), *par trois fils élastiques en ligne droite* Am, mm', m'B; *ces fils, de même matière, sont susceptibles de s'allonger ou de se contracter de quantités très-petites, et l'on admet que leur élasticité varie en raison inverse de leurs longueurs : on propose de déterminer les petites oscillations des deux points* m, m'.

Dans l'état d'équilibre, les trois fils ont même longueur, $a = \frac{AB}{3}$, et même force élastique ou tension f. Au bout du temps t, soient

$$Am = a + x, \quad mm' = a + y, \quad m'B = a + z.$$

La distance AB étant invariable, les variations de longueur, positives et négatives, des trois cordons satisfont à la condition

$$x + y + z = 0.$$

D'après la loi admise, la tension du fil Am sera $\frac{fa}{a+x}$, ou sensiblement $f\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, puisque la variable x est supposée très-petite par rapport à a. Pareillement, la tension du cordon mm' sera représentée par $f\left(1 - \frac{y}{a}\right)$, et celle du cordon m'B par $f\left(1 - \frac{z}{a}\right)$.

Cela posé, les équations du mouvement sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{f(y-x)}{a}, \\[2ex] \dfrac{d^2(x+y)}{dt^2} = \dfrac{f(z-y)}{a}. \end{cases}$$

En les retranchant l'une de l'autre, on élimine x et z, et il reste

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3fy}{a} = -3n^2y, \ldots \left(\frac{f}{a} = n^2\right).$$

L'intégrale de l'équation (2) est

$$y = \mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} + \mathrm{B}\sin nt\sqrt{3}.$$

Avant de substituer cette valeur de y dans la première des équations (1), remarquons que la *valeur particulière*

$$x = -\tfrac{1}{2}y = -\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} + \mathrm{B}\sin nt\sqrt{3}\right),$$

vérifie cette équation, puisqu'elle la réduit à l'égalité $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -3n^2y$. D'après cela, l'équation linéaire fournie par la substitution de y,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = n^2\left(\mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} + \mathrm{B}\sin nt\sqrt{3}\right),$$

aura pour intégrale complète

$$x = -\tfrac{1}{2}y + \mathrm{C}\cos nt + \mathrm{D}\sin nt,$$

ou

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} + \mathrm{B}\sin nt\sqrt{3}\right) + \mathrm{C}\cos nt + \mathrm{D}\sin nt.$$

x et y étant connus en fonction du temps, on connaîtra les distances $\mathrm{A}m = a + x$, $\mathrm{A}m' = 2a + x + y$.

Soient $\mathrm{A}m = r$, $\mathrm{A}m' = s$; il vient

$$r = a - \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin nt\sqrt{3} + \mathrm{C}\cos nt + \mathrm{D}\sin nt,$$

$$s = 2a + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\cos nt\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin nt\sqrt{3} + \mathrm{C}\cos nt + \mathrm{D}\sin nt.$$

Les valeurs des constantes A, B, C, D, dépendent des écarts et des vitesses donnés à l'origine du temps.

Supposons, par exemple, que les deux masses aient été écartées de quantités égales et d'un même côté de leurs positions d'équilibre, sans vitesses initiales; soit ω l'écart commun, on trouvera

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -\omega, \quad D = 0,$$

et, par suite,

$$r = a - \omega \cos nt,$$

$$s = 2a - \omega \cos nt.$$

Les oscillations rectilignes de chaque masse suivront donc la même loi que les oscillations circulaires d'un pendule simple, de longueur a, écarté de la verticale d'un angle ω, et sollicité par une force verticale égale à f.

Il y a un autre cas dans lequel chaque masse oscille encore comme un pendule simple : c'est celui où elles ont été primitivement écartées de quantités égales et de côtés opposés de leurs positions d'équilibre. On trouve alors

$$r = a - \omega \cos nt\sqrt{3},$$

$$s = 2a + \omega \cos nt\sqrt{3}.$$

Les oscillations ont encore une amplitude égale au double de l'écart initial; mais elles sont plus rapides que dans le premier cas, le rapport des durées des oscillations étant celui de 1 à $\sqrt{3}$.

La solution précédente s'étend sans difficulté aux mouvements rectilignes de trois, ou d'un plus grand nombre de corps m, m', m'', de masses égales, liés entre eux consécutivement, et à deux points fixes, par des ressorts dont les contractions ou dilatations sont supposées très-petites.

Euler a appliqué ces formules à la propagation du son à travers une file de molécules équidistantes.

Parmi les diverses hypothèses qu'on peut faire sur l'état initial, nous laisserons au lecteur le soin de discuter le cas où la masse m a été d'abord écartée de sa position d'équilibre de la quantité très-petite ω, puis retenue en ce lieu jusqu'à ce que les deux autres masses, s'accommodant à ce déplacement, aient pris de nouvelles positions d'équilibre; puis la masse m étant rendue libre, son mouvement *se propage* peu à peu aux autres. On assignera les époques de plus grande vitesse pour chaque masse, etc.

CHAPITRE IV.

SUR LES PETITES OSCILLATIONS D'UNE BALANCE CHARGÉE DE DEUX POIDS.

Une balance dont le point de suspension O *est placé au-dessus du fléau, et à égale distance de ses extrémités* A *et* B, *supporte des poids égaux suspendus à des fils de même longueur* AM, BN *dont on néglige la masse. Cette machine ayant été dérangée de sa position d'équilibre d'une manière quelconque, sans toutefois que le fléau et les poids cessent d'être renfermés dans le même plan vertical* AOB, *on propose de déterminer les mouvements oscillatoires du fléau et des deux poids* (fig. 92).

Soit AOB la position de la balance au bout du temps t; la perpendiculaire abaissée du point O sur AB contient le centre de gravité G de la balance, et l'angle $\omega = \text{GO}y$ que fait cette droite avec la verticale, est égal à l'inclinaison du fléau AB sur l'horizon; soient φ et ψ les angles que font avec la verticale les fils AM et BN auxquels sont suspendus les deux poids égaux. Les trois angles ω, φ et ψ déterminent à chaque instant la position de la machine.

Posons encore $\text{OA} = \text{OB} = a$, $\text{AM} = \text{BN} = b$, angle $\text{OAB} = \varepsilon$, $\text{OG} = c$; désignons par P l'intensité des deux poids, par T, T′ les tensions des deux fils, par M le poids du fléau et des parties de la machine qui lui sont invariablement attachées, telles que les bras AO, BO et l'aiguille OG.

Les coordonnées x, y, x', y', des centres de gravité des poids placés en M et N s'expriment aisément en fonction

des angles ω, φ et ψ :

$$x = \text{OP} = a\cos(\varepsilon - \omega) + b\sin\varphi,$$
$$y = \text{MP} = a\sin(\varepsilon - \omega) + b\cos\varphi,$$
$$x' = -\text{OQ} = -a\cos(\varepsilon + \omega) + b\sin\psi,$$
$$y' = \text{NQ} = a\sin(\varepsilon + \omega) + b\cos\psi.$$

En ayant égard aux tensions T, T′, on pourra appliquer à chaque poids les formules du mouvement d'un point libre, ce qui fournira d'abord quatre équations,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g\text{T}\sin\varphi}{\text{P}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(1 - \frac{\text{T}\cos\varphi}{\text{P}}\right),$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{g\text{T}'\sin\psi}{\text{P}}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = g\left(1 - \frac{\text{T}'\cos\psi}{\text{P}}\right).$$

Il faut y joindre l'équation du mouvement du fléau qui peut être considéré comme tournant autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan AOB; or le moment de la tension T, dirigée suivant AM, par rapport au point O, est, en valeur absolue,

$$\text{T}.\text{OI} = \text{T}a\cos(\varphi + \varepsilon - \omega) = \text{T}[f\cos(\varphi - \omega) - e\sin(\varphi - \omega)],$$

en posant

$$a\cos\varepsilon \quad \text{ou} \quad \text{AC} = f, \quad a\sin\varepsilon \quad \text{ou} \quad \text{OC} = e.$$

Le moment de la tension T′, dirigée suivant BN, est pareillement

$$\text{T}'[f\cos(\omega - \psi) - e\sin(\omega - \psi)];$$

enfin le moment du poids de la machine est

$$\text{M}.\text{GH} = \text{M}c\sin\omega.$$

La tension T′ tend à faire tourner le fléau dans le sens où nous supposons que le mouvement a lieu, c'est-à-dire de manière que l'angle ω croisse avec le temps; le moment de

cette force devra donc être pris positivement, tandis que les deux autres seront pris avec le signe —. On aura donc l'équation

$$\frac{M}{g}(K^2+c^2)\frac{d^2\omega}{dt^2} = -Mc\sin\omega - T[f\cos(\varphi-\omega) - e\sin(\varphi-\omega)]$$
$$+T'[f\cos(\omega-\psi) - e\sin(\omega-\psi)];$$

$\frac{MK^2}{g}$ désigne le moment d'inertie de la balance par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

On aurait pu obtenir l'équation du mouvement de rotation, directement et sans recourir à l'intermédiaire des tensions, en exprimant que les forces perdues se font équilibre sur le système.

La force perdue, appliquée au poids situé en M, a pour composantes $-\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2}$ et $P-\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$; son moment, par rapport à l'axe O, sera la *somme* des moments de ses deux composantes. On aura pareillement le moment de la force perdue par le poids N. La somme des moments des poids de tous les points du fléau est M.GH $=$ $Mc\sin\omega$. Quant à la *force effective* qui anime chaque molécule μ située à une distance r de l'axe, on peut la décomposer en deux, l'une centripète $\frac{\mu v^2}{r}$ qui va rencontrer l'axe, et dont l'effet est par conséquent nul, l'autre tangentielle $\mu\frac{dv}{dt}$ ou $\mu r\frac{d^2\omega}{dt^2}$, dont le moment est $-\mu r^2\frac{d^2\omega}{dt^2}$; la somme des termes semblables étendue à tous les points de la balance est

$$\frac{-M(K^2+c^2)}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Égalant à zéro la somme algébrique de ces moments, on aurait l'équation ci-dessus, d'où les tensions seraient éliminées.

Les cinq équations précédentes renferment la solution complète du problème.

Cas des petites oscillations.

Nous négligerons les carrés de ω, φ et ψ; alors

$$x = f + e\omega + b\varphi, \qquad y = e - f\omega + b.$$
$$x' = -f + e\omega + b\psi, \quad y' = e + f\omega + b.$$

Et, par suite, les cinq équations se réduisent à

$$(1) \qquad e\frac{d^2\omega}{dt^2} + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g\mathrm{T}}{\mathrm{P}}\varphi = 0,$$

$$(2) \qquad f\frac{d^2\omega}{dt^2} + g\left(1 - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{P}}\right) = 0,$$

$$(3) \qquad e\frac{d^2\omega}{dt^2} + b\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{P}}\psi = 0,$$

$$(4) \qquad f\frac{d^2\omega}{dt^2} - g\left(1 - \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{P}}\right) = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{M}(\mathrm{K}^2 + c^2)}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \mathrm{T}[f - e(\varphi - \omega)] - \mathrm{T}'[f - e(\omega - \psi)] + \mathrm{M}c\omega = 0.$$

Pour éliminer les tensions, on tirera des équations (2) et (4) les valeurs de T et T′,

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} + \frac{\mathrm{P}f}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad \mathrm{T}' = \mathrm{P} - \frac{\mathrm{P}f}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2}, \ldots (\mathrm{T} + \mathrm{T}' = 2\mathrm{P}),$$

et on les substituera dans les trois autres équations.

En négligeant les produits $\varphi\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\psi\frac{d^2\omega}{dt^2}$, qui sont du même ordre de petitesse que les carrés de ω, φ, ψ, et posant, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{M}(\mathrm{K}^2 + c^2) + 2\mathrm{P}f^2}{g} = h, \quad 2\mathrm{P}e + \mathrm{M}c = l,$$

il vient

$$(6) \qquad e\frac{d^2\omega}{dt^2} + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0,$$

$$e\frac{d^2\omega}{dt^2}+b\frac{d^2\psi}{dt^2}+g\psi=0, \tag{7}$$

$$h\frac{d^2\omega}{dt^2}+l\omega-\mathrm{P}e(\varphi+\psi)=0. \tag{8}$$

La question est ramenée à intégrer le système de trois équations linéaires à coefficients constants.

2. Examinons d'abord le *cas particulier où le point de suspension coïncide avec le milieu* C *du fléau* AB.

Il faut faire, dans les formules précédentes, $e=0$, et l'on a, en posant

$$\frac{l}{h}=\lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{g}{b}=\mu^2,$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}+\lambda^2\omega=0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mu^2\varphi=0, \tag{10}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\mu^2\psi=0, \tag{11}$$

équations où les variables sont séparées. Les mouvements du fléau et des deux poids seront donc indépendants les uns des autres.

La première équation a pour intégrale

$$\omega=\mathrm{A}\cos(\lambda t+\alpha).$$

Les constantes A et α dépendent de l'état initial. Par exemple, si le fléau a été originairement incliné à l'horizon d'un angle ω_0 sans vitesse initiale, on aura $\alpha=0$, $\mathrm{A}=\omega_0$, et, par suite, $\omega=\omega_0\cos\lambda t$. En général, la constante A sera une très-petite quantité.

Ainsi, le fléau oscille comme un pendule simple dont la longueur est $\frac{g}{\lambda^2}$ ou $\frac{\mathrm{M}(\mathrm{K}^2+c^2)+2\mathrm{P}a^2}{\mathrm{M}c}$.

La durée d'une oscillation est $\pi\sqrt{\frac{h}{l}}$.

Si le centre de gravité G est, comme à l'ordinaire, très-voisin du point de suspension, la distance c sera très-petite, et il en sera de même de λ. Si le centre de gravité coïncidait avec le centre de suspension, λ serait nul, et le fléau n'oscillerait plus. En effet, il serait alors en équilibre dans toutes les positions possibles; toutefois, ceci suppose qu'à l'origine le fléau a été simplement incliné à l'horizon sans recevoir d'impulsion : autrement, comme aucune force ne s'opposerait à son mouvement, l'angle ω irait en croissant et ne pourrait plus être regardé comme très-petit, ainsi que l'exigent nos formules. Elles cesseraient donc d'être applicables.

Si le centre de gravité G était *au-dessus* du point de suspension, il faudrait changer c en $-c$ dans les formules, et, par suite, λ deviendrait imaginaire. Le mouvement cesserait encore d'être oscillatoire, et la balance serait *folle*. L'inclinaison du fléau croîtrait avec le temps, suivant une loi différente de celle qu'assignent nos formules.

Les équations (10) et (11) ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de φ en ψ; leurs intégrales sont les mêmes aux constantes près :

$$\varphi = \mathrm{B}\cos(\mu t + \beta),$$
$$\psi = \mathrm{C}\cos(\mu t + \gamma).$$

Les petites oscillations des deux poids coïncident donc avec celles de deux pendules simples, de longueur b; elles ont même durée, mais non la même amplitude, en général.

Pour déterminer φ et ψ avec une approximation plus grande, on rétablira, dans les équations (10) et (11), les

termes $\frac{a}{b}\varphi\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $-\frac{a}{b}\psi\frac{d^2\omega}{dt^2}$, qui proviennent de l'élimination des tensions, et que nous avions d'abord supprimés; et l'on remplacera, dans ces termes, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ par sa valeur $-A\lambda^2\cos(\lambda t+\alpha)$. Les équations (10) et (11), ainsi complétées, deviennent

$$(12)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mu^2\varphi = \frac{Aa\lambda^2}{b}\varphi\cos(\lambda t+\alpha),$$

$$(13)\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2}+\mu^2\psi = -\frac{Aa\lambda^2}{b}\psi\cos(\lambda t+\alpha).$$

Nous allons en déduire *deux termes de correction* à ajouter aux valeurs principales trouvées plus haut pour φ et ψ.

Soit
$$\varphi = B\cos(\mu t+\beta)+Au,$$

d'où
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -B\mu^2\cos(\mu t+\beta)+A\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (12), et *qu'on néglige, dans cette seconde approximation, le terme affecté du carré de* A, il vient

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\mu^2 u = \frac{a\lambda^2}{b}B\cos(\lambda t+\alpha)\cos(\mu t+\beta)$$
$$= \frac{a\lambda^2}{2b}B\left\{\cos[(\mu+\lambda)t+\beta+\alpha]+\cos[(\mu-\lambda)t+\beta-\alpha]\right\}.$$

On obtient aisément une valeur particulière de u, de la forme

$$u = M\cos[(\mu+\lambda)t+\beta+\alpha]+N\cos[(\mu-\lambda)t+\beta-\alpha],$$

et les valeurs de M et N sont

$$M = \frac{-a\lambda B}{2b(2\mu+\lambda)}, \quad N = \frac{a\lambda B}{2b(2\mu-\lambda)}.$$

Cette solution particulière permettrait de ramener l'intégration de l'équation différentielle précédente, à celle d'une équation linéaire sans second membre; mais on remarquera qu'on n'a besoin que de cette intégrale particulière, et qu'on n'obtiendrait rien de plus général, en prenant l'expression complète de u, puisque déjà le premier terme de la valeur de φ renferme les deux constantes arbitraires B, β, qui suffisent à l'intégrale générale.

On a ainsi

$$\varphi = B\cos(\mu t+\beta) + AM\cos[(\mu+\lambda)t+\beta+\alpha] + AN\cos[(\mu-\lambda)t+\beta-\alpha].$$

En changeant a en $-a$ dans les valeurs précédentes de M et N, et les constantes B, β en C, γ, on aura

$$\psi = C\cos(\mu t+\gamma) - AM\cos[(\mu+\lambda)t+\gamma+\alpha] - AN\cos[(\mu-\lambda)t+\gamma-\alpha].$$

Ainsi les mouvements de pendules simples que nous avions trouvés dans une première approximation, pour chaque poids, seront soumis à des perturbations provenant du mouvement oscillatoire du fléau.

Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement le fléau ait été horizontal et en repos, on aura pour $t = 0$,

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad A = 0;$$

par suite, ω sera toujours nul : le fléau demeurera horizontal, et, comme les valeurs de φ et de ψ se réduiront à leurs premiers termes, les deux poids oscilleront, indépendamment l'un de l'autre, comme deux pendules simples de même longueur.

Si l'on suppose qu'à l'origine les deux poids aient été laissés en repos dans la verticale, et que le fléau seul ait

été incliné d'un angle ω_0, sans vitesse initiale, on aura, pour $t = 0$,

$$\omega = \omega_0, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

On conclut des deux premières conditions, comme on l'a vu,

$$\alpha = 0, \quad A = \omega_0;$$

les deux suivantes donnent

$$B \cos\beta \left[1 + \frac{a\lambda^2\omega_0}{b(4\mu^2 - \lambda^2)}\right] = 0,$$

$$\mu B \sin\beta \left[1 + \frac{a\lambda^2\omega_0}{b(4\mu^2 - \lambda^2)}\right] = 0;$$

et les deux dernières fournissent deux conditions qui ne diffèrent des précédentes que par le changement de a en $-a$, de B en C et de β en γ, savoir :

$$C \cos\gamma \left[1 - \frac{a\lambda^2\omega_0}{b(4\mu^2 - \lambda^2)}\right] = 0,$$

$$\mu C \sin\gamma \left[1 - \frac{a\lambda^2\omega_0}{b(4\mu^2 - \lambda^2)}\right] = 0.$$

On ne peut satisfaire à ces équations qu'en posant $B = 0$, $C = 0$; donc φ et ψ seront constamment nuls, c'est-à-dire que les fils de suspension des poids resteront toujours verticaux, tandis que le fléau oscillera à la manière d'un pendule simple.

Il ne faut pas perdre de vue que ces conséquences de nos formules n'ont lieu qu'autant que les oscillations sont très-petites, et que, de plus, le point de suspension C est supposé parfaitement fixe, et en ligne droite avec les points A et B, supposition qui ne se réalise jamais complétement dans la nature.

3. Revenons au système des équations (6), (7), (8) qui

résolvent le problème, dans le cas général où le centre de suspension est situé hors de AB.

Si on leur appliquait immédiatement la méthode ordinaire, qui consiste à poser

$$\omega = C \sin(t\sqrt{\rho} + m),$$

$$\varphi = Cp \sin(t\sqrt{\rho} + m),$$

$$\psi = Cq \sin(t\sqrt{\rho} + m),$$

où C et m désignent des constantes arbitraires, et ρ, p, q, trois constantes qu'il s'agit de déterminer de manière que les équations soient satisfaites, on trouverait $p = q$, attendu que les équations (6) et (7) ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de φ en ψ. Il en résulterait $\varphi = \psi$, et l'on n'aurait pour déterminer ρ qu'une *équation du second degré*, comme s'il ne s'agissait que de deux équations linéaires seulement, par exemple les équations (6) et (8); on obtiendrait donc les valeurs de ω et de $\varphi = \psi$, avec quatre constantes arbitraires au lieu de six.

Cette solution n'aurait pas le degré de généralité désirable.

Mais, de ce que les équations (6) et (7) se confondent en une seule, quand dans la seconde on remplace ψ par φ, il n'en faut pas conclure que les deux fonctions du temps que ces inconnues représentent soient identiques. Posons en effet dans l'équation (7),

$$\psi = \varphi + u,$$

et elle se réduira, en vertu de l'équation (6), à

$$(9) \qquad b\frac{d^2u}{dt^2} + gu = 0;$$

on est ainsi ramené à considérer le système des trois équations (6), (8), (9).

Or l'équation (9) n'est pas seulement vérifiée par $u = 0$,

elle a pour intégrale

$$u = \mathrm{E}\sin(\varepsilon + \mu t) \quad \text{en posant} \quad \frac{g}{b} = \mu^2;$$

donc on n'est pas en droit d'écrire $\psi = \varphi$, mais bien

$$\psi = \varphi + \mathrm{E}\sin(\varepsilon + \mu t).$$

Actuellement il reste à appliquer la méthode des équations linéaires à coefficients constants aux équations (6) et (8); on posera donc

$$\omega = \mathrm{C}\sin(t\sqrt{\rho} + m), \quad \varphi = \mathrm{C}p\sin(t\sqrt{\rho} + m),$$

et l'on trouvera

$$p = \frac{e\rho}{g - b\rho}, \quad (l - h\rho)(g - b\rho) - 2\mathrm{P}e^2\rho = 0.$$

Cette équation du second degré en ρ a ses deux racines positives, puisque l'hypothèse $\rho = \frac{g}{b}$ donne un résultat négatif, et que $\rho = 0$, $\rho = \infty$ donnent des résultats positifs.

Soient ρ_1, ρ_2 ces racines, et p_1, p_2 les valeurs correspondantes de p; les expressions complètes de ω, φ et ψ seront

$$\omega = \mathrm{C}_1\sin(t\sqrt{\rho_1} + m_1) + \mathrm{C}_2\sin(t\sqrt{\rho_2} + m_2),$$
$$\varphi = \mathrm{C}_1 p_1\sin(t\sqrt{\rho_1} + m_1) + \mathrm{C}_2 p_2\sin(t\sqrt{\rho_2} + m_2),$$
$$\psi = \mathrm{C}_1 p_1\sin(t\sqrt{\rho_1} + m_1) + \mathrm{C}_2 p_2\sin(t\sqrt{\rho_2} + m_2) + \mathrm{E}\sin(\varepsilon + \mu t).$$

Au lieu de chercher φ et la différence $u = \psi - \varphi$, on aurait pu prendre pour inconnues $(\varphi + \psi)$ et $\varphi - \psi$.

Soient

$$\left.\begin{aligned} \varphi + \psi &= 2s, \\ \varphi - \psi &= 2v, \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} \varphi &= s + v, \\ \psi &= s - v; \end{aligned}\right.$$

on trouverait ainsi plus de symétrie dans les expressions de ces variables, qui prendraient la forme

$$\varphi = \mathrm{C}_1 p_1\sin(t\sqrt{\rho_1} + m_1) + \mathrm{C}_2 p_2\sin(t\sqrt{\rho_2} + m_2) + \mathrm{E}\sin(\varepsilon + \mu t),$$
$$\psi = \mathrm{C}_1 p_1\sin(t\sqrt{\rho_1} + m_1) + \mathrm{C}_2 p_2\sin(t\sqrt{\rho_2} + m_2) - \mathrm{E}\sin(\varepsilon + \mu t).$$

S'il arrive qu'à une certaine époque on ait $s = \nu$, le poids N se trouvera dans la verticale, tandis que le poids M en sera écarté d'une manière sensible. Le contraire aura lieu s'il arrive que l'on ait, à une autre époque, $s = -\nu$, et ces alternatives pourront se reproduire. Une grande variété de phénomènes pourra naître ainsi des circonstances initiales qui servent à déterminer les six constantes arbitraires. C'est par ces considérations qu'*Euler* (*) a expliqué certaines apparences singulières observées par *Jean Bernoulli* sur une balance en mouvement.

(*) Acta Academiæ Petropolitanæ, 1777.

FIN.

Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 11.

Fig. 13.

Fig. 1

g. 17.

Fig. 18.

E. Wormser sc.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06359 2680

